Geometric control theory for quantum back-action evasion

横寺　裕
慶應義塾大学

第86回 重力波研究交流会
2017年4月28日(金) 東京工業大学

概要

1. 研究背景･目的
   - システム制御の考え方
   - 信号検出問題
2. 幾何学的制御
3. 結果
   - 量子外乱分離の一般構造
   - オプトメカニクス系での設計例
4. まとめ

概要

1. 研究背景・目的

- システム制御の考え方
- 信号検出問題

2. 幾何学的制御

3. 結果

- 量子外乱分離の一般構造
- オプトメカニクス系での設計例

4. まとめ

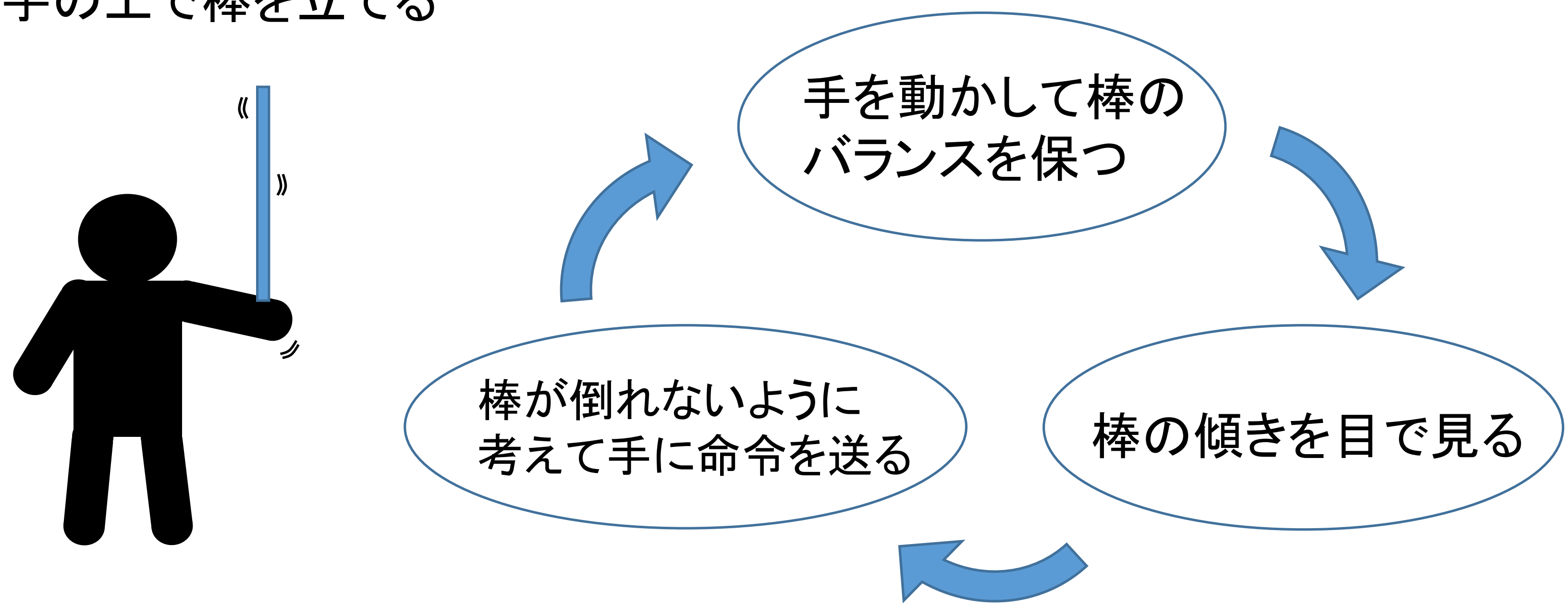
システム制御の考え方

制御の目的

対象系が我々の目標とする振る舞いをするように, 対象物に操作を加えること.

その基礎となるのが「フィードバック制御」

例) 手の上で棒を立てる

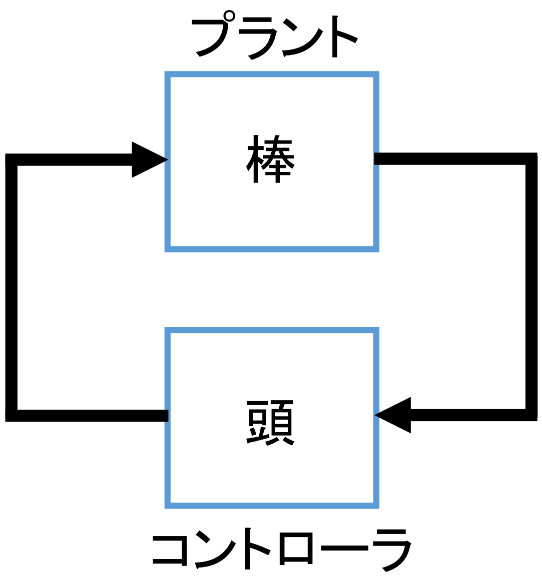


システム制御の考え方

制御の応用例

- ロボットの姿勢制御
- 航空機の自動操縦
- 部屋の空調管理
- オペアンプの特性改善 …etc.

➡ 制御理論は対象系を限定しない**横断的な**設計理論



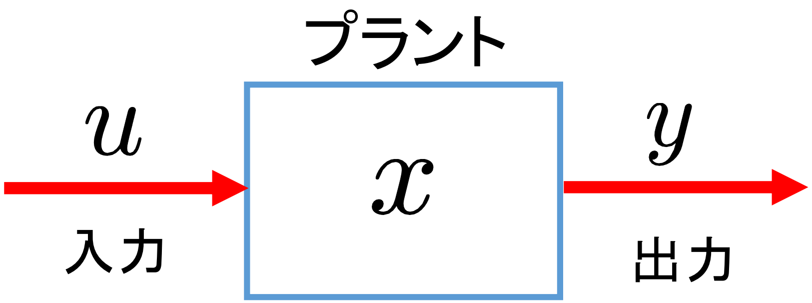
フィードバック制御とは

対象系(プラント)に別の系(コントローラ)を接続し, これらを合わせた全体系が目標通りに振る舞うようにする

システム制御の考え方

システムの表現

入出力のあるシステム, 特に線形システムに対する理論体系が出来上がっている



状態方程式 $$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

出力方程式 $$y = Cx + Du$$

行列 (A, B, C, D) によってシステムが特徴付けられる

周波数領域での解析も容易 (上の2式をラプラス変換)

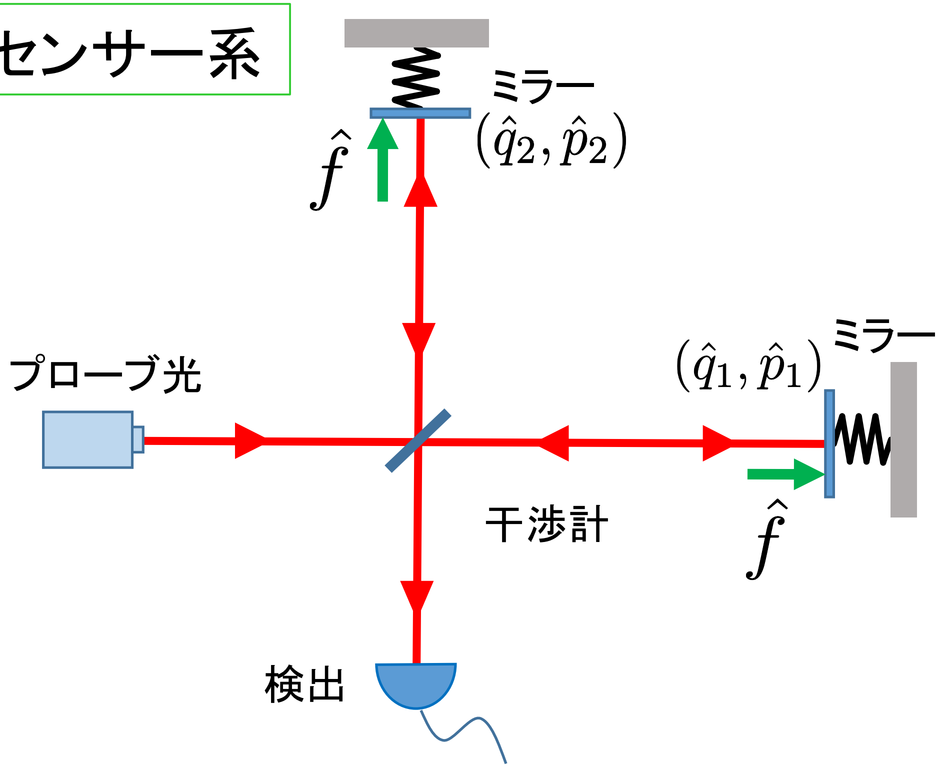
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

伝達関数：$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

周波数領域での入出力間の応答を表す

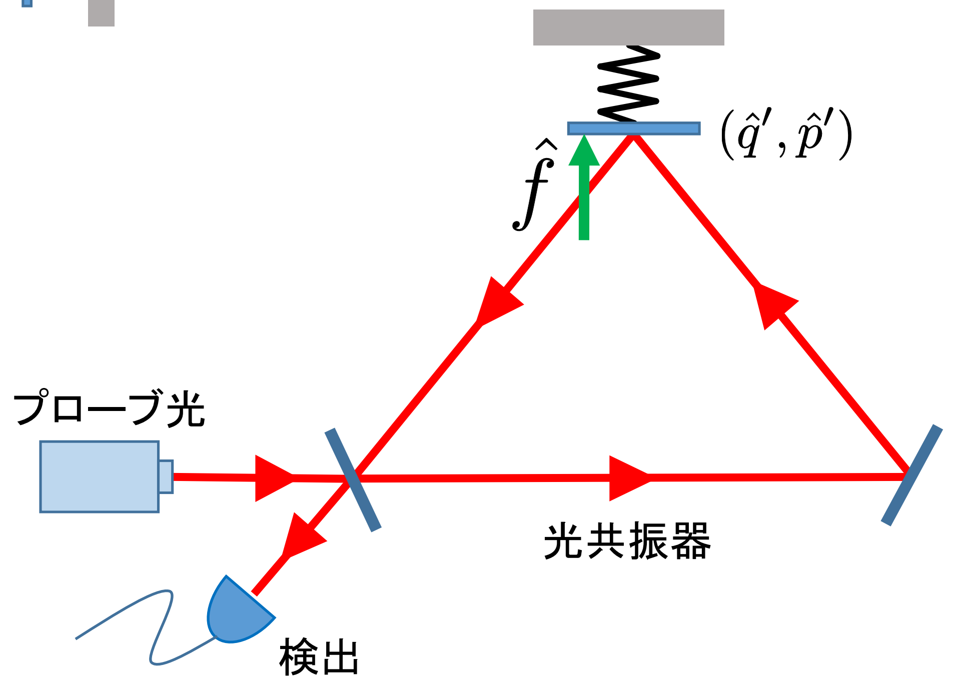
オプトメカニクス系を用いた微弱信号検出

センサー系

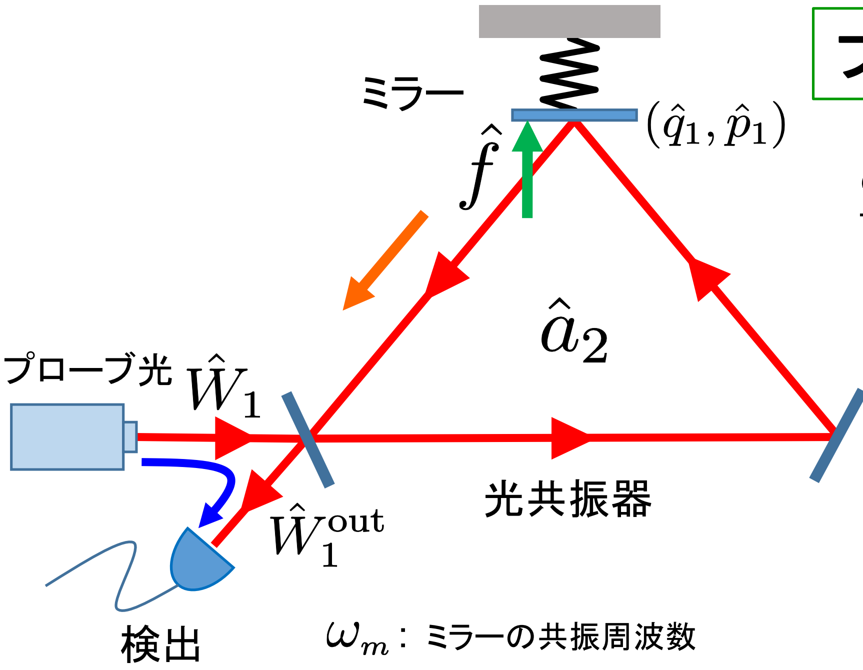


差のモードに移行

$$\hat{q}' = (\hat{q}_1 - \hat{q}_2)/\sqrt{2}$$
$$\hat{p}' = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)/\sqrt{2}$$



オプトメカニクス系を用いた微弱信号検出



プラント

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + B\hat{W}_1 + b\hat{f} \qquad \hat{W}_1^{\mathrm{out}} = C\hat{x} + \hat{W}_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_m & 0 & 0 \\ -\omega_m & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa/2 & 0 \\ g & 0 & 0 & -\kappa/2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = -B^{\top} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\kappa} \end{bmatrix}$$

$$\hat{W}_1 = [\hat{Q}_1, \hat{P}_1]^{\top} \quad \hat{W}_1^{\mathrm{out}} = [\hat{Q}_1^{\mathrm{out}}, \hat{P}_1^{\mathrm{out}}]^{\top}$$

$$\hat{x} = [\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2]^{\top}$$

これを測定する

ω_m：ミラーの共振周波数

κ ：共振器内部光の減衰係数

g ：ミラーと共振器内部光の結合係数

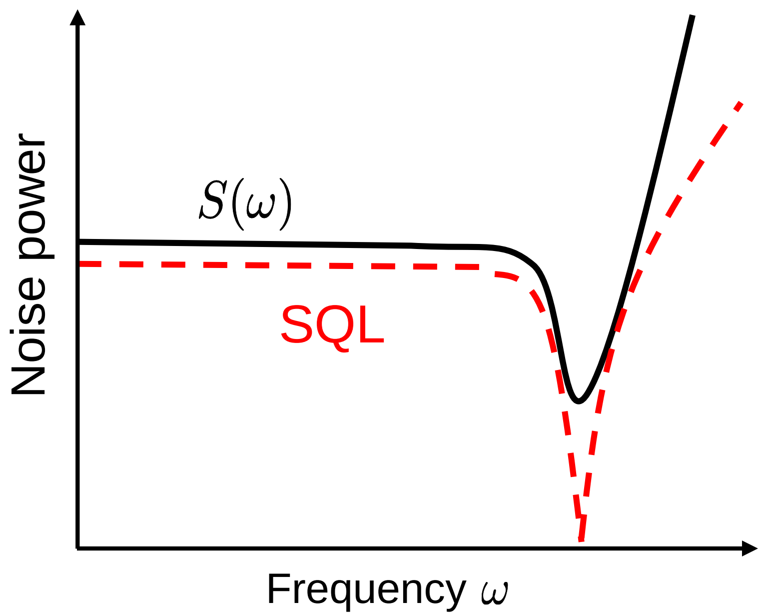
γ ：ミラーと $\hat{f}$ の結合係数

周波数領域での入出力関係

$$\underbrace{\hat{P}_1^{\mathrm{out}}(s)}_{\text{測定出力}} = \underbrace{\Xi_f(s)\hat{f}(s)}_{\text{信号}} + \underbrace{\Xi_Q(s)\hat{Q}_1(s)}_{\text{輻射圧雑音}} + \underbrace{\Xi_P(s)\hat{P}_1(s)}_{\text{ショット雑音}}$$

標準量子限界 (SQL)

$$\underbrace{\hat{P}_1^{\mathrm{out}}(s)}_{\text{測定出力}} = \underbrace{\Xi_f(s)\hat{f}(s)}_{\text{信号}} + \underbrace{\Xi_Q(s)\hat{Q}_1(s)}_{\text{輻射圧雑音}} + \underbrace{\Xi_P(s)\hat{P}_1(s)}_{\text{ショット雑音}}$$



ノイズのパワースペクトル

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \langle|\hat{P}_1^{\mathrm{out}}(\omega)/\Xi_f(\omega) - \hat{f}(\omega)|^2\rangle \\ &= \left|\frac{\Xi_Q}{\Xi_f}\right|^2 \langle|\hat{Q}_1|^2\rangle + \left|\frac{\Xi_P}{\Xi_f}\right|^2 \langle|\hat{P}_1|^2\rangle \\ &\geq \underbrace{\frac{|\omega^2 - \omega_m^2|}{\gamma\omega_m}}_{\text{標準量子限界}} \end{aligned}$$

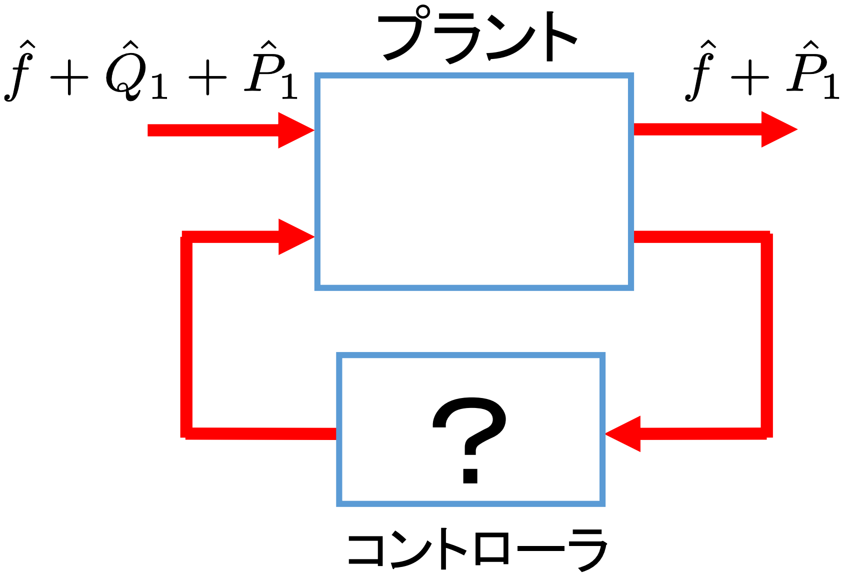
標準量子限界 (Standard Quantum Limit, SQL)

標準量子限界が現れる理由

- 測定出力が輻射圧雑音とショット雑音の両方を含んでいる.
- $\hat{Q}_1$ と $\hat{P}_1$ の間に不確定性関係 $\langle|\hat{Q}_1|^2\rangle\langle|\hat{P}_1|^2\rangle \geq 1/4$ がある.

Back-action evasion (BAE)

$$\hat{P}_1^{\mathrm{out}}(s) = \Xi_f(s)\hat{f}(s) + \cancel{\Xi_Q(s)\hat{Q}_1(s)} + \Xi_P(s)\hat{P}_1(s)$$



Back-action evasion (BAE)

輻射圧雑音が出力に現れない
ようにする設計問題

$$\boxed{\Xi_Q(s) = 0, \ \forall s}$$

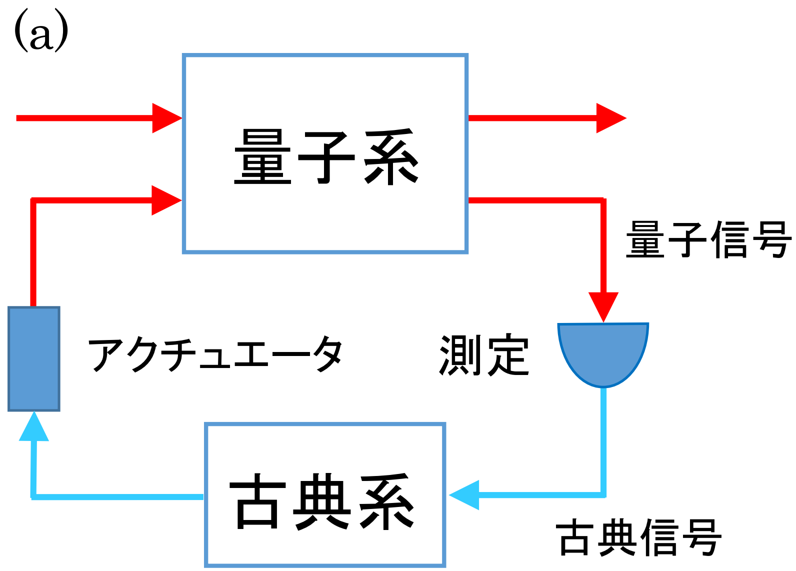
BAE達成後は $\hat{P}_1$ 方向のスクイーズド光を
入力し, 更なるS/N比向上を図る

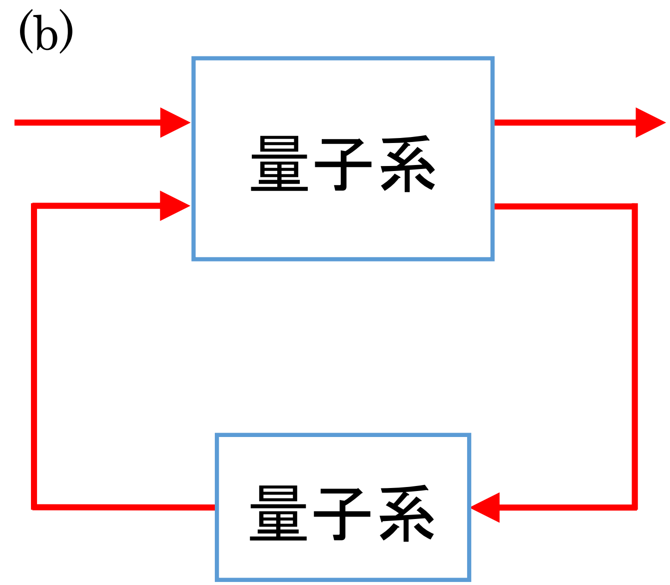
Q. BAEを達成するコントローラの構造はどのように与えられるか？

BAEを達成するコントローラの一般的設計法を
システム制御の視点から提案する

➡ A. 幾何学的制御 (Geometric control)

フィードバック制御の種類





(a) 測定フィードバック
プラントからの出力の測定結果に基づいてコントローラ(古典系)がアクチュエータに信号を送り,制御入力をプラントに返す.

(b) コヒーレントフィードバック
プラントからの出力を測定せず,コントローラ(量子系)が量子的な操作を施し, 制御入力をプラントに返す.

測定フィードバックではBAEを達成できないことがわかっている.

⇒ コヒーレントフィードバックによる設計を考える.

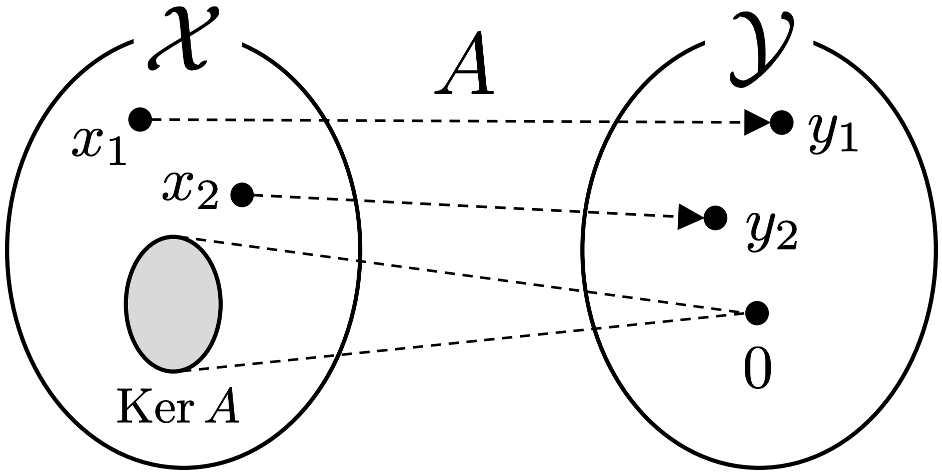
N. Yamamoto, Coherent versus measurement feedback : Linear systems theory for quantum information, Phys. Rev. X **4**, 041029 (2014).

概要

1. 研究背景・目的
    - システム制御の考え方
    - 信号検出問題
2. 幾何学的制御
3. 結果
    - 量子外乱分離の一般構造
    - オプトメカニクス系での設計例
4. まとめ

幾何学的制御 (Geometric control)

線形システムの特性を部分空間の相互関係から考察する手法



- 零空間, 核 (kernel)

$$\mathrm{Ker}\,A = \{x \in \mathcal{X} \,|\, Ax = 0\}$$

⇒ Aを作用させると零になる$\mathcal{X}$の空間

- 値域, 像 (image)

$$\mathrm{Im}\,A = \{y \in \mathcal{Y} \,|\, y = Ax, \forall x\}$$

⇒ Aを作用して写った先の空間全体 $\mathcal{Y}$

不変部分空間 (Invariant subspaces)

- A 不変

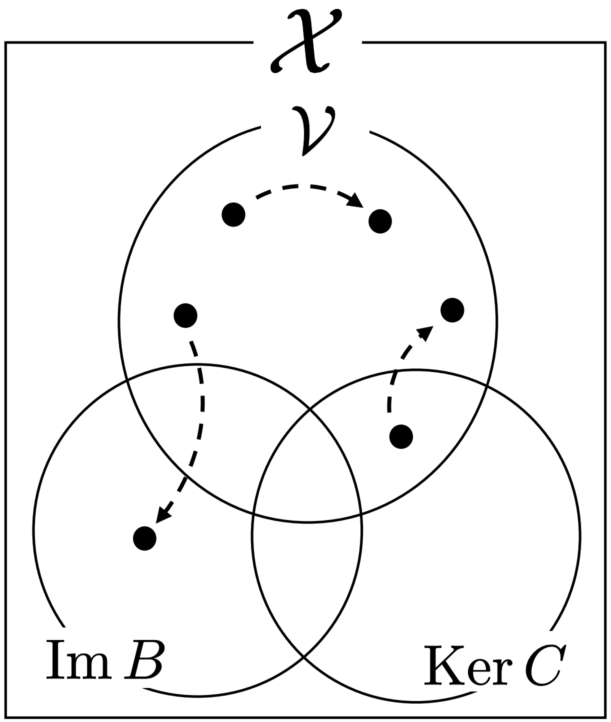
$$A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$$

- (C, A) 不変

$$A(\mathcal{V}_1 \cap \operatorname{Ker} C) \subseteq \mathcal{V}_1$$

- (A, B) 不変

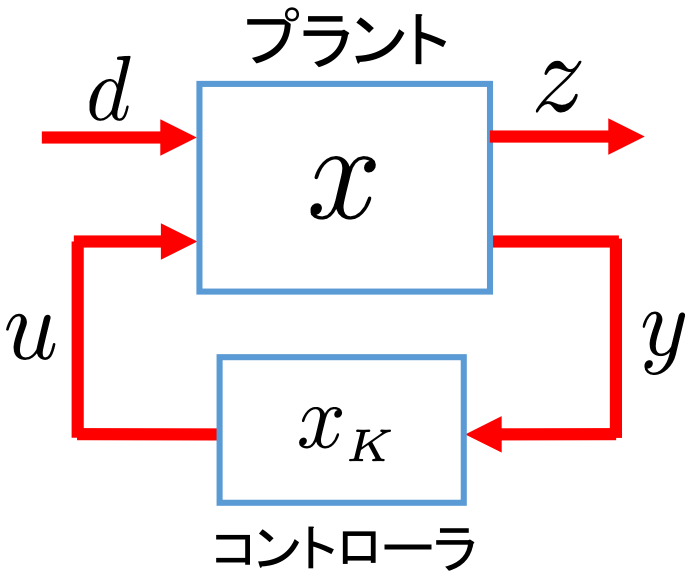
$$A\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_2 \oplus \operatorname{Im} B$$



$\mathcal{V}_1$ が (C, A) 不変, $\mathcal{V}_2$ が (A, B) 不変で, $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ が成り立つとき, $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ を (C, A, B) ペアと呼ぶ.

上記の不変部分空間は与えられたプラントの構造から定まる

フィードバック制御の構成



d : 外乱　　y : 測定出力

u : 制御入力　　z : 評価出力

プラント

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad z(t) = Hx(t)$$

コントローラ

$$\frac{dx_K(t)}{dt} = A_K x_K(t) + B_K y(t)$$

$$u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t)$$

閉ループ系

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} d$$

$$z = \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$

プラントとコントローラを合わせた拡大系の状態方程式と
出力方程式が得られた.

幾何学的制御による外乱分離

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BD_KC & BC_K \\ B_KC & A_K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} d \qquad z = \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$

制御目標

外乱 d が評価出力 z に現れないように (A_K, B_K, C_K, D_K) を設計する

Q. (A_K, B_K, C_K, D_K) をどのように設計すればよいか？

定理1 (可解条件)

上記の閉ループ系において, 以下の包含関係を満たすような (C, A, B) ペア $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ が存在すれば, 外乱分離可能.

$$\mathrm{Im}\, E \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, H$$

上記の可解条件は,

- 設計するコントローラに依存せず, プラントのみで決まる.
- 線形代数を用いてチェックできる.

J. M. Schumacher, IEEE Trans. Autom. Control **25**, 1133-8 (1980).

幾何学的制御による外乱分離

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BD_KC & BC_K \\ B_KC & A_K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} d \qquad z = \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$

定理2 (コントローラのパラメトリゼーション)

以下の条件を満たす行列(A_K, B_K, C_K)で特徴付けられるフィードバックコントローラによって外乱分離は達成される.

$$\begin{cases} A_K = N(A + BF + GC - BD_KC)N^+ \\ B_K = -N(G - BD_K) \\ C_K = (F - D_KC)N^+ \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(F - D_KC) \supseteq \mathcal{V}_1 \qquad \mathrm{Im}(G - BD_K) \subseteq \mathcal{V}_2$$

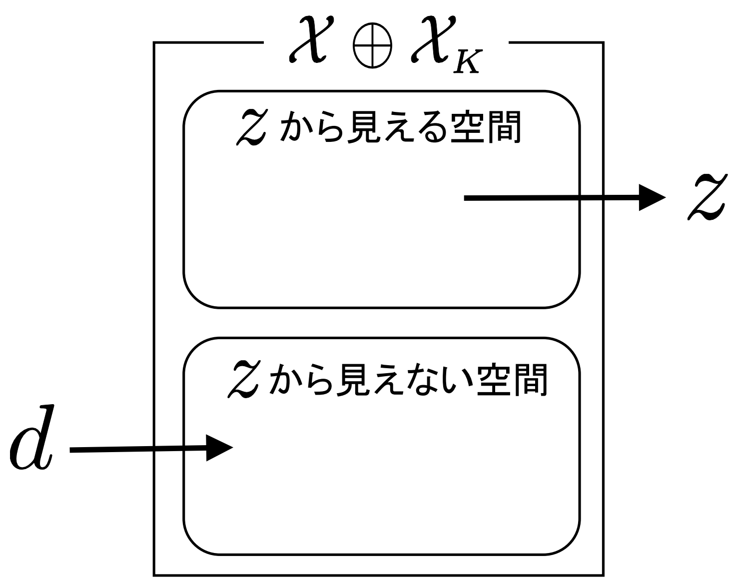
$$\mathrm{Ker}\, N = \mathcal{V}_1 \quad (N : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{X}_K) \qquad NN^+ = I$$

$$\dim \mathcal{X}_K = \dim\mathcal{V}_2 - \dim\mathcal{V}_1$$

J. M. Schumacher, IEEE Trans. Autom. Control **25**, 1133-8 (1980).

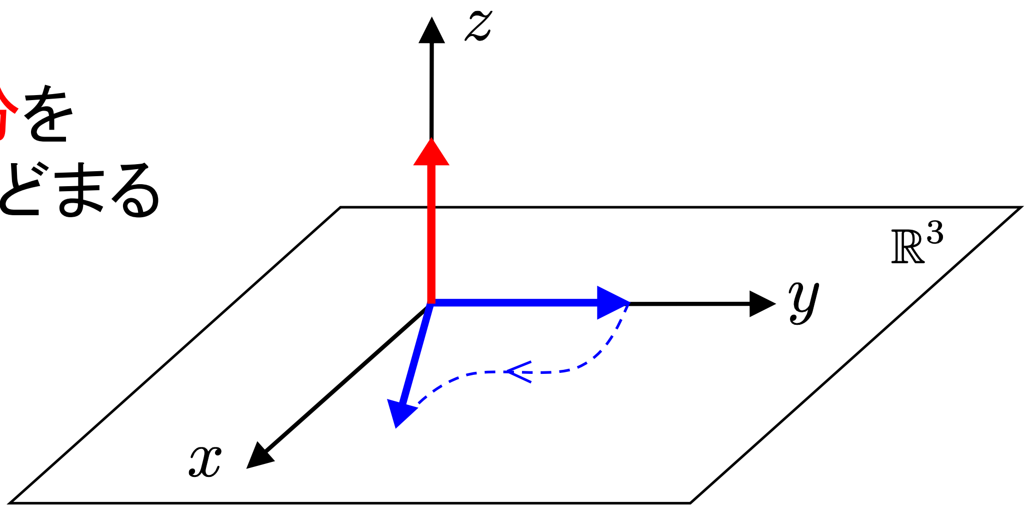
幾何学的制御の直観的理解

外乱 d が常に評価出力 z から見えない空間に閉じ込められていれば, 外乱分離が達成される



例)

外乱ベクトルが z 方向成分を持つことなくxy 平面上にとどまるように制御する



概要

1. 研究背景・目的
    - システム制御の考え方
    - 信号検出問題
2. 幾何学的制御
3. 結果
    - 量子外乱分離の一般構造
    - オプトメカニクス系での設計例
4. まとめ

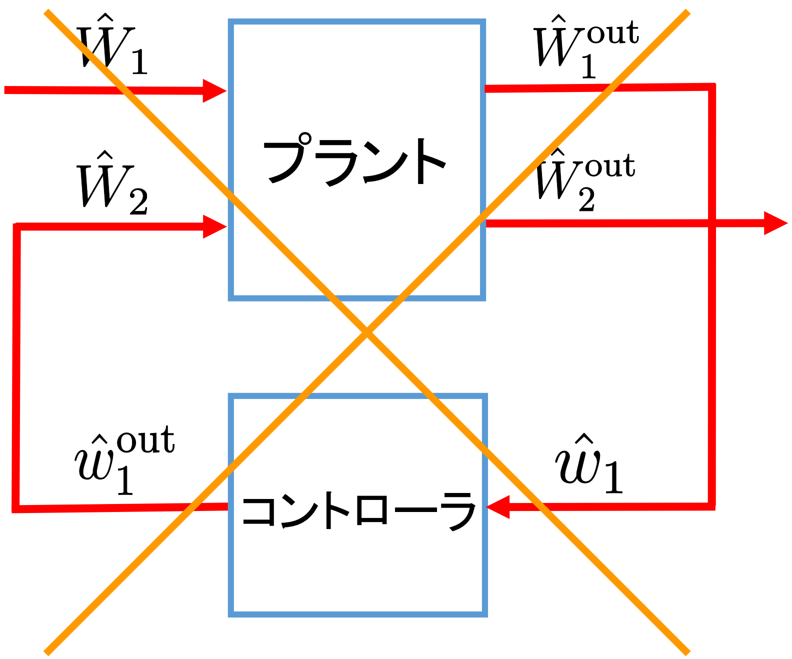
BAE可能な量子系の一般構造

幾何学的制御を量子系のBAE問題に適用する

古典閉ループ系

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix}} d$$

$$z = \boxed{\begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$



古典の閉ループ系では, 外乱や状態ベクトルの係数行列が

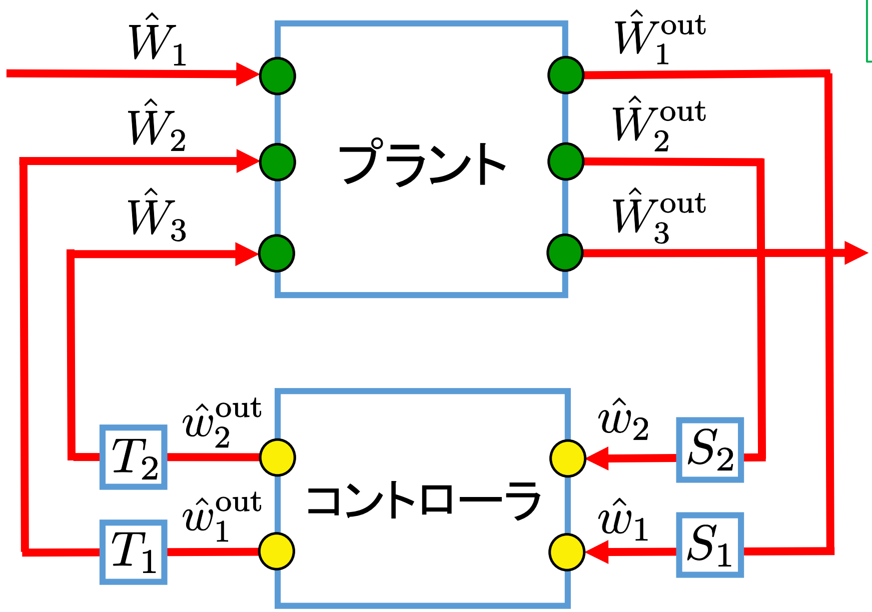
$$\begin{bmatrix} E & O \end{bmatrix}^\top, \quad \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix}$$

のような特殊な構造を持っている.
一般に, 量子系ではこの構造は達成できない.

⬇

コントローラを多入出力系に拡張し,
フィードバックループを複数形成.

BAE可能な量子系の一般構造



仮定

1) コントローラは2入力2出力系
→ プラントは3入力3出力系

2) 各外界との結合強度は等しい

3) コントローラの入出力前後にscattering processを設置

$$S_j = T_j = S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2)$$

→ $\pi/2$ - phase shifter

改良後の量子閉ループ系

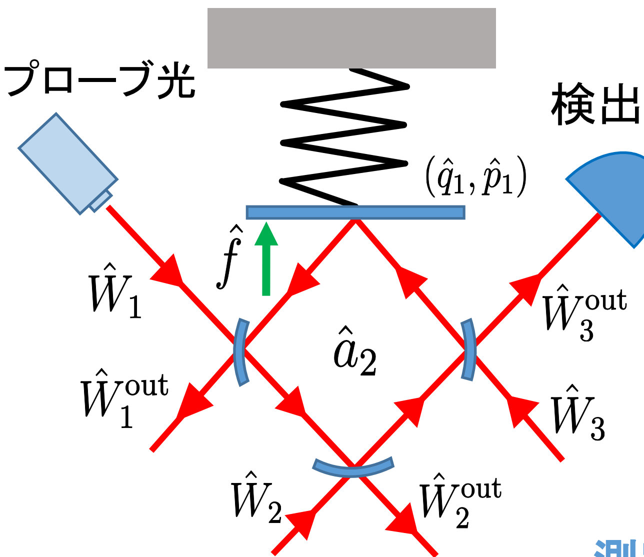
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BC & BSC_K \\ B_K SC & A_K - B_K C_K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}}\hat{W}_1 + \begin{bmatrix} b \\ O \end{bmatrix}\hat{f}$$

$$\hat{W}_3^{\text{out}} = \boxed{\begin{bmatrix} C & O \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \hat{W}_1$$

→ $\boxed{D_K = -I_2}$

オプトメカニクス系におけるBAEの実現

3入力3出力のオプトメカニクス系に幾何学的制御を適用する



BA noise $\hat{Q}_1$ と測定出力 $\hat{P}_3^{\mathrm{out}}$ にのみ注目

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_m & 0 & 0 \\ -\omega_m & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}\kappa & 0 \\ g & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\kappa \end{bmatrix} \hat{x} - \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\kappa} \\ 0 \end{bmatrix}}}_{E} \hat{Q}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{f}$$

BA noise

$$\hat{P}_3^{\mathrm{out}} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\kappa} \end{bmatrix}}}_{H} \hat{x} + \hat{P}_1$$

測定する位相成分

部分空間の情報

$$\mathrm{Im}\, E = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \mathrm{Ker}\, H = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

BA noise $\hat{Q}_1$ の侵入する空間　　**出力 $\hat{P}_3^{\mathrm{out}}$ から見えない空間**

コントローラ設計の手順

ステップ1 (可解条件のチェック)

$$\mathrm{Im}\, E \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, H$$

$$\mathrm{Im}\, E = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \mathrm{Ker}\, H = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

- 後述のアルゴリズムを使って計算すると

$$\mathcal{V}_1 = \mathrm{Im}\, E \quad \mathcal{V}_2 = \mathrm{Ker}\, H$$

とわかる. よって, BAEを達成するコントローラが存在する. **定理 1**

- コントローラの次元は

$$\dim \mathcal{X}_K = \dim \mathcal{V}_2 - \dim \mathcal{V}_1 = 2$$

と求まる. よって, 設計すべきコヒーレントフィードバックコントローラはシングルモード. **定理 2**

コントローラ設計の手順

ステップ2 (コントローラのパラメトリゼーション)

定理2より

$$\begin{cases} \underline{A_K} = N\{A + 2(BF + GC + BC) + GF\}N^+ \\ \underline{B_K} = -N(G + B)S \\ \underline{C_K} = -S(F + C)N^+ \end{cases} \qquad NN^+ = I$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -\sqrt{\kappa} & f_{14} \\ \frac{g}{\sqrt{\kappa}} & 0 & 0 & f_{24} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} \\ -\frac{g}{\sqrt{\kappa}} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ 0 & \sqrt{\kappa} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & 0 & n_{24} \end{bmatrix}$$

$f_{ij},\ g_{ij},\ n_{ij}$ ：フリーパラメータ

➡ BAEを達成するコントローラは行列 (F, G, N) で特徴付けられ,
定理2より, コントローラの集合が得られた.

コントローラの具体的な構造を得るには, さらに条件を課す必要がある.

コントローラ設計の手順

ステップ3 (Physical realizability)

設計するコントローラが量子系である条件

$$A_K \Sigma + \Sigma A_K^\top + 2B_K \Sigma B_K^\top = O$$

$$B_K = \Sigma C_K^\top \Sigma$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

パラメータ間の拘束条件

$$(1)\ f_{12} = -g_{12} \qquad (2)\ f_{11} = g_{22} \qquad (3)\ n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} = -1$$

$$(4)\ f_{12}n_1 = f_{11}n_2 - f_{14} \qquad (5)\ f_{24} + \sqrt{\kappa} = \frac{g}{\sqrt{\kappa}} n_2$$

$$(6)\ \left(\frac{3}{2}\kappa + \sqrt{\kappa} f_{24}\right) n_1 + \omega_m n_2 = -\sqrt{\kappa} f_{11}$$

$$(7)\ \omega_m n_1 - \left(\frac{3}{2}\kappa + \sqrt{\kappa} f_{24}\right) n_2 = \sqrt{\kappa} f_{12}$$

$$n_1 = n_{11}n_{24} - n_{14}n_{21}$$

$$n_2 = n_{12}n_{24} - n_{14}n_{22}$$

コントローラ設計の手順

ステップ4 (パッシブコントローラ)

設計するコントローラが能動デバイスを含まない条件

$$\Sigma A_K \Sigma = -A_K$$

$$\Sigma B_K \Sigma = -B_K$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

パラメータ間の拘束条件

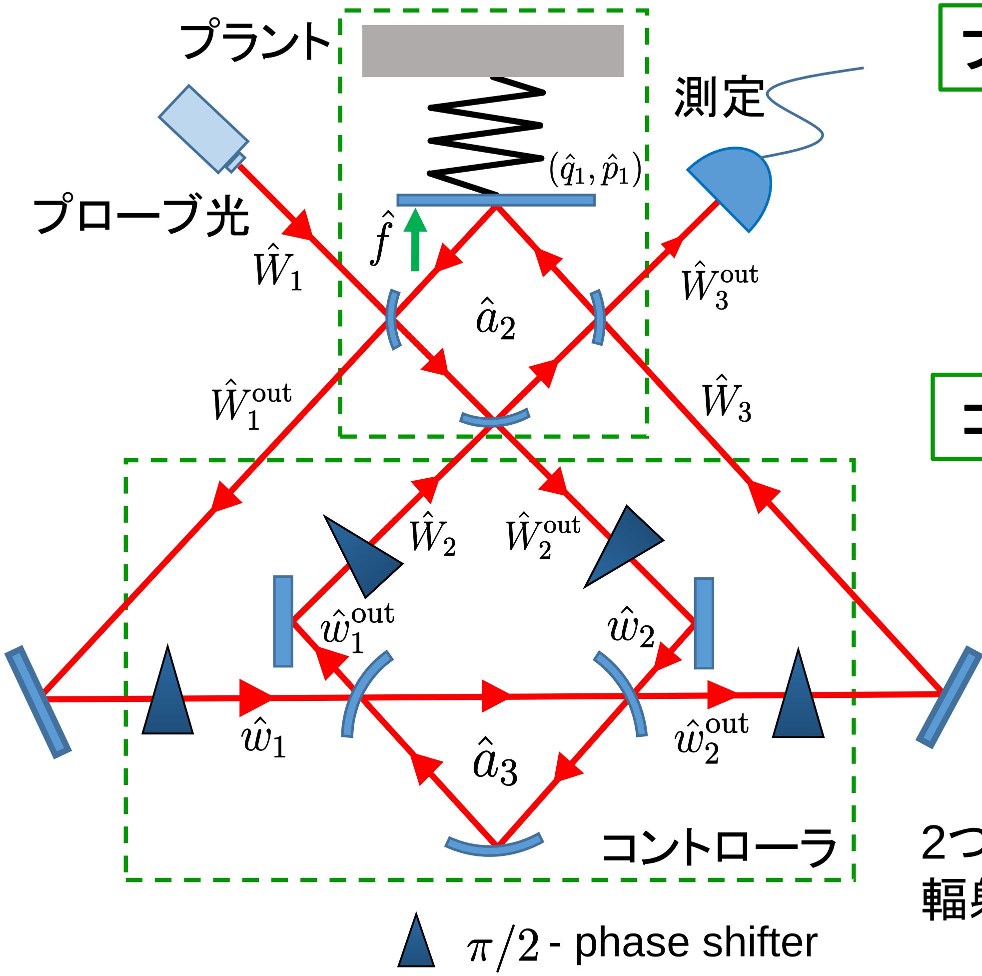
8) $f_{12} = \dfrac{g}{\sqrt{\kappa}}$　　9) $f_{11} = 0$

10) $n_{11} = -n_{22}$　　11) $n_{12} = n_{21}$

BAEコントローラの実装例

コントローラの行列 (A_K, B_K, C_K) は以下のように定まる

$$A_K = \begin{bmatrix} -\frac{g^2}{\kappa} & -\omega_m \\ \omega_m & -\frac{g^2}{\kappa} \end{bmatrix} \qquad C_K = -B_K^\top = \begin{bmatrix} \frac{g}{\sqrt{\kappa}} & 0 \\ 0 & \frac{g}{\sqrt{\kappa}} \end{bmatrix}$$



プラント

3入力3出力のオプトメカニクス系

κ ：光の減衰率

g ：光とミラーの結合強度

コントローラ

2入力2出力の共振器

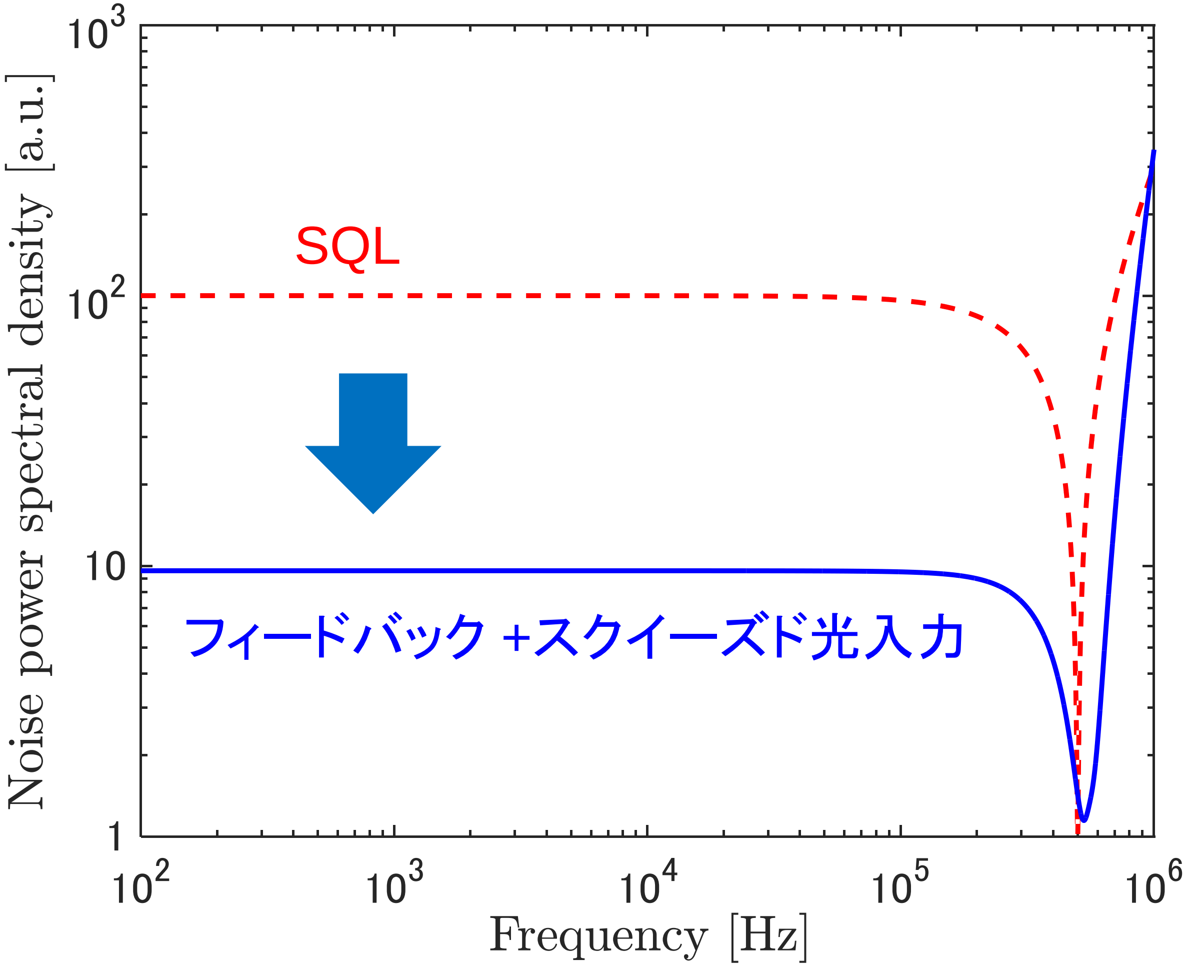
g^2/κ ：光の減衰率

$-\omega_m$ ：共振器の変調周波数

2つの系をフィードバック接続することで
輻射圧雑音が相殺され, 出力に現れなくなる.

シミュレーション結果

- 熱雑音の効果を入れる
- 幾何学的制御で得られたコントローラにおいてパラメータを調整
- $\hat{P}_1$ 方向のスクイーズド光を入力する



ミラー共振周波数

$$\omega_m/2\pi = 0.5\ \mathrm{MHz}$$

光の減衰率

$$\kappa/2\pi = 1\ \mathrm{MHz}$$

ミラーと光の結合強度

$$g/2\pi = 300\ \mathrm{kHz}$$

ミラーと $\hat{f}$ の結合強度

$$\gamma/2\pi = 5\ \mathrm{kHz}$$

スクイージングパラメータ

$$r = 2\ (\approx 9\,\mathrm{dB})$$

概要

1. 研究背景･目的

- システム制御の考え方
- 信号検出問題

2. 幾何学的制御

3. 結果

- 量子外乱分離の一般構造
- オプトメカニクス系での設計例

4. まとめ

まとめ

信号検出におけるBAE問題は幾何学的制御の枠組みで捉えることができる

- 古典の幾何学的制御を適用可能な量子系の一般構造を示した.
- BAEを達成するフィードバックコントローラのパラメトリゼーションが得られた.
- BAEコントローラの実装例を示した.

詳細は

Y. Yokotera and N. Yamamoto, Geometric control theory for quantum back-action evasion, EPJ Quantum Technol. **3**, 15 (2016).

Appendix

不変部分空間に関する補題

補題1

$\mathcal{V}_1$ が (C, A) 不変部分空間であるとき, 以下の関係を満たす行列 F が存在する.

$$(A + GC)\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_1$$

補題2

$\mathcal{V}_2$ が (A, B) 不変部分空間であるとき, 以下の関係を満たす行列 G が存在する.

$$(A + BF)\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_2$$

可解条件の確認方法

定理1の可解条件をチェックする際は, 以下の系1を使うと便利

定理1 $\mathrm{Im}\,E \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \mathrm{Ker}\,H$

系1 $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{V}^*$

$\mathrm{Im}\,E$ を含む $\mathcal{V}_1$ のうち最小のもの

$\mathrm{Ker}\,H$ に含まれる $\mathcal{V}_2$ のうち最大のもの

$\mathcal{S}^*$ - **algorithm** :

(Step 1) $\mathcal{S}_0 := \mathrm{Im}\,E$

(Step 2) $\mathcal{S}_i := \mathrm{Im}\,E \oplus A(\mathcal{S}_{i-1} \cap \mathrm{Ker}\,C) \quad (i = 1, 2, \ldots)$

(Step 3) $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_i \quad$ (if $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{i-1}$ in Step 2).

$\mathcal{V}^*$ - **algorithm** :

(Step 1) $\mathcal{V}_0 := \mathrm{Ker}\,H$

(Step 2) $\mathcal{V}_i := \mathrm{Ker}\,H \cap A^{-1}(\mathcal{V}_{i-1} \oplus \mathrm{Im}\,B) \quad (i = 1, 2, \ldots)$

(Step 3) $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}_i \quad$ (if $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i-1}$ in Step 2)