基礎ゼミ2021/7/2 (金)

新潟大学 伊藤拓也

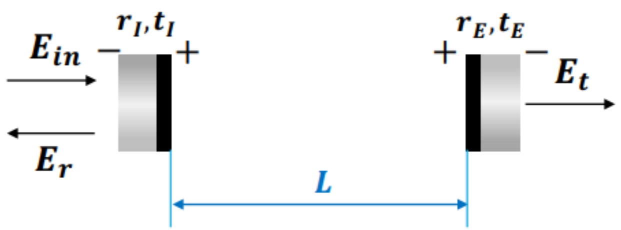
目次

・ファブリペロー共振器の透過光と反射光

・Free Spectral Range(FSR)とフィネス

・ファブリペローマイケルソン干渉計周波数応答

透過光と反射光



透過するとt倍
反射するとr倍

透過光電場E_t

$$E_t = \sum_{j=1}^{\infty} t_I t_E r_I^{j-1} r_E^{j-1} e^{i\times(2j-1)kL} E_{in}$$

$t_I t_E$ ：両ミラーを1回ずつ透過
r_I^{j-1} : ITMをj-1回反射
r_E^{j-1} : ETMをj-1回反射

$$E_t = \frac{t_I r_E e^{i2kL}}{1 - r_I r_E e^{i2kL}} E_{in}$$

反射光電場E_r

$$E_r = -r_I E_{in} + \sum_{j=1}^{\infty} t_I^2 r_I^{j-1} r_E^{j} e^{i\times 2jkL} E_{in}$$

t_I^2 : ITMを2回透過
r_I^{j-1}:ITMをj-1回反射
r_E^{j} :ETMをj回反射

$$E_r = \left[-r_I + \frac{t_I^2 r_E e^{i2kL}}{1 - r_I r_E e^{i2kL}}\right] E_{in}$$

振幅透過率t_{CAV}、振幅反射率r_{CAV}は

$$t_{CAV} = \frac{E_t}{E_{in}} = \frac{t_I r_E e^{i2kL}}{1 - r_I r_E e^{i2kL}}$$

$$r_{CAV} = \frac{E_r}{E_{in}} = -r_I + \frac{t_I^2 r_E e^{i2kL}}{1 - r_I r_E e^{i2kL}}$$

Fabry-Perot共振器　透過光と反射光

強度反射率透過率(R_{cav}、T_{cav})は、振幅率の絶対値の2乗

$$T_{cav} = |t_{cav}|^2 = \left\{\frac{t_I r_E}{1 - r_I r_E(cos2kL + isin2kL)}\right\}\left\{\frac{t_I r_E}{1 - r_I r_E(cos2kL - isin2kL)}\right\} = \frac{(t_I r_E)^2}{(1 - r_I r_E)^2 + 4r_I r_E sin^2 kL}$$

$$R_{cav} = |r_{cav}|^2 = \frac{[r_I - (r_I^2 + t_I^2) r_E]^2 + 4r_I r_E (r_I^2 + t_I^2) sin^2 kL}{(1 - r_I r_E)^2 + 4r_I r_E sin^2 kL}$$

T_{cav}の式から、

$$\begin{cases} kL = n\pi \quad : \quad \text{最大値}\ \dfrac{(t_I r_E)^2}{(1 - r_I r_E)^2} & \textbf{共振状態} \\ kL = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi: \quad \text{最小値}\ \dfrac{(t_I r_E)^2}{(1 + r_I r_E)^2} & \textbf{反共振状態} \end{cases}$$

Free Spectral Range(FSR)とフィネス

T_{cav}はレーザー周波数νの周期関数となっている。

・**Free Spectral Range(FSR) : $\boldsymbol{T_{cav}}$の基本周期[Hz]**

$$kL = \frac{\pi \nu_{FSR}}{c} L = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \nu_{FSR} = \frac{c}{2L}$$

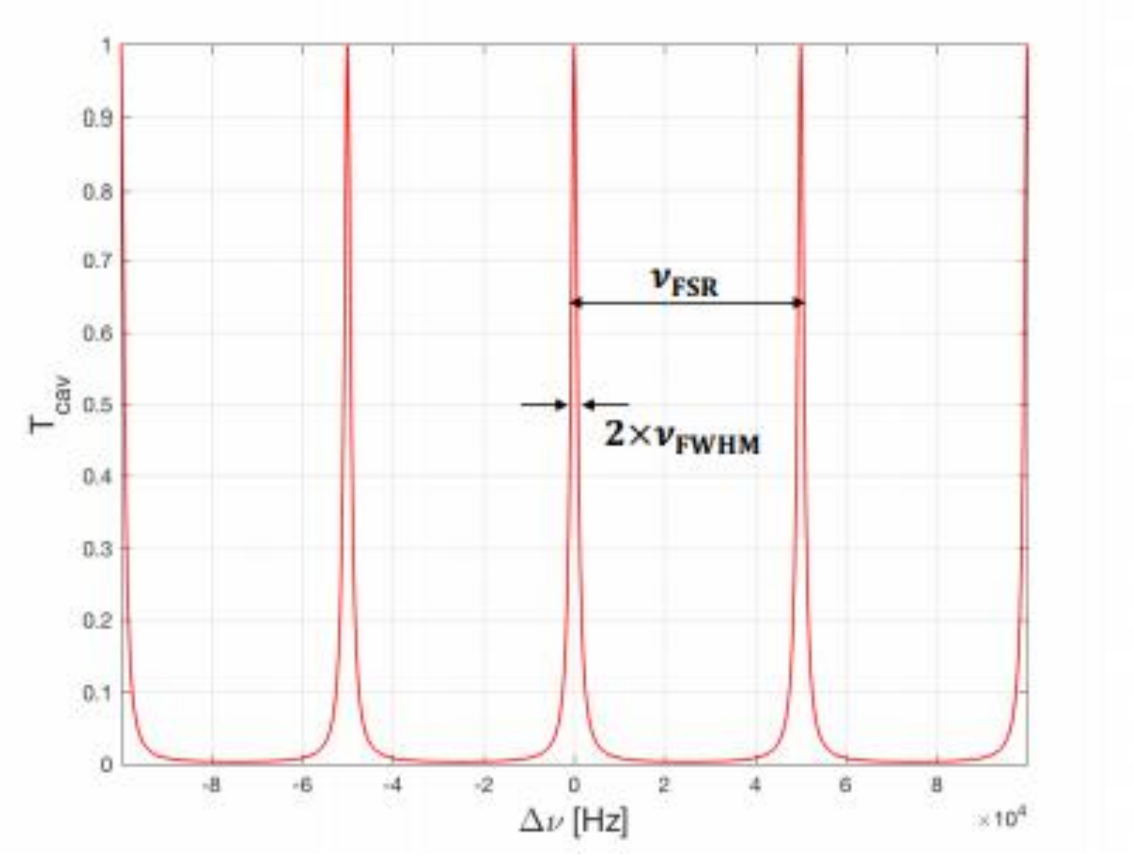
・**半値全幅 : $\boldsymbol{T_{cav}(\nu_{FWHM}) = \frac{1}{2} T_{cav}^{Max}}$を満たす周波数[Hz]**

$$\frac{(t_I r_E)^2}{(1 - r_I r_E)^2 + 4 r_I r_E sin^2 \frac{\pi \nu_{FWHM}}{c} L} = \frac{1}{2} \frac{(t_I r_E)^2}{(1 - r_I r_E)^2}$$

$$\Rightarrow \nu_{FWHM} = \frac{c(1 - r_I r_E)}{2\pi L \sqrt{r_I r_E}}$$

・**Finnese : FSRと半値全幅の比で共振の鋭さを表す**

$$F = \frac{\nu_{FSR}}{\nu_{\boldsymbol{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_I r_E}}{c(1 - r_I r_E)}$$



FSR 及び FWHM の定義

周波数応答

X アームをn回往復するのにかかる時間Δt_{nx}

$$\Delta t_{nx} \simeq \frac{2L_x}{c}n + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L_x}{c}n}^{t} h(t')dt'$$

周波数応答を考えるためにフーリエ変換をすると

$$\Delta t_{nx} \simeq \frac{2L_x}{c}n + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t-\frac{2L_x}{c}n}^{t} h(\omega)e^{i\omega t'}dt' = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t'}\right]_{t-\frac{2L_x}{c}n}^{t} d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2L_x\omega}{c}n}}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

振幅反射率R_{cav}において、$kL \rightarrow \frac{1}{2}\Delta t$として$\Delta t_{nx}$の式を代入

$$\frac{E_{rx}}{E_{inx}} = \frac{-r_I + (r_I^2 + t_I^2)r_E}{1 + r_I r_E}\left[1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_{FPx}(\omega)h(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]$$

周波数応答

$$\frac{E_{rx}}{E_{inx}} = \frac{-r_I + (r_I^2 + t_I^2)r_E}{1 + r_I r_E}\left[1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_{FPx}(\omega)h(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right] = \frac{-r_I + (r_I^2 + t_I^2)r_E}{1 + r_I r_E}[1 + i\Phi_{FPx}]$$

の虚部（位相変化を表す項）で現れる$H_{FPx}(\omega)$が長さLのXアームの周波数応答

$$H_{FPx}(\omega) = \frac{\alpha\Omega}{\omega}\frac{sin\gamma_x}{1 - r_I r_E e^{-2i\gamma_x}}$$

$$\alpha = \frac{t_I^2 r_E}{-r_I + (r_I^2 + t_I^2)r_E}$$

$$\gamma_x = \frac{L_x\omega}{c}$$

Yアームの場合は、重力波が潮汐的な空間の歪を起こすため、位相変化がマイナスになる

(干渉計の全体の位相遅れ) $= \Phi_- = \Phi_{FPx} - \Phi_{FPy} = 2\Phi_{FPx} = -\int_{-\infty}^{\infty} H_{FPMI}(\omega)h(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

周波数応答

ファブリペローマイケルソン干渉計の周波数応答　$H_{FPMI} = 2H_{FP} = 2\frac{\alpha\Omega}{\omega}\frac{sin\gamma}{1-r_I r_E e^{-2i\gamma}}e^{-i\gamma}$

L[m] を動く間の重力波の時間変化が十分小さい$\left(\gamma = \frac{L\Omega}{c} \ll 1\right)$近似のもとで絶対値をとると

$$|H_{FPMI}| = \frac{2\alpha\omega L}{c(1-r_I r_E)}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2}} \qquad \Omega_c = \frac{c(1-r_I r_E)}{2L\sqrt{r_I r_E}}$$

ファブリペローマイケルソン干渉計とマイケルソン干渉計の周波数応答の比は

$$\frac{|H_{FPMI}|}{|H_{MI}|} = \frac{\alpha}{(1-r_I r_E)}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2}}$$