☆ ガウシアンビームの式の導出

・自由空間（電荷と電流がない空間）でのMaxwell方程式

$$
\begin{cases}
\mathrm{rot}\,\mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0 & \text{—①} \\
\mathrm{rot}\,\mathbb{H} - \dfrac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = 0 & \text{—②} \\
\mathrm{div}\,\mathbb{D} = 0 & \text{—③} \\
\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0 & \text{—④}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mathbb{D} = \varepsilon_0 \mathbb{E} \\
\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{H}
\end{cases}
$$

→

$$
⑤
\begin{cases}
\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{E} = 0 \\
\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t^2}\right)\mathbb{H} = 0
\end{cases}
$$

→ 波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(x, y, z, t) = 0$$

↓ スカラー化（偏光を考えない）

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E(x, y, z, t) = 0 \quad -⑥$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

↓

$f_0(a_0 x + b_0 y + c_0 z - d_0 t)$

$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = \frac{1}{c^2} d_0^2$

$\rightarrow e^{i(a_0 x + b_0 y + c_0 z - d_0 t)}$

○ 変数分離

時間に依存する項と、空間に依存する項を分ける.

$$E(x, y, z, t) = U(x, y, z) \times T(t) \quad -⑦$$

⑦を⑥に代入

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U(x, y, z)\, T(t) = 0 \quad -⑧$$

$$\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

⑧を $UT$ で割ると（$UT$は恒等的に0ではないとする）

$$\frac{\cancel{T}\nabla^2 U}{U\cancel{T}} - \frac{\cancel{U}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T}{\cancel{U}T} = 0$$

$$\frac{\nabla^2 U}{U} = \frac{1}{c^2}\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}T}{T}$$

上の式が成り立つには、右辺と左辺が定数

$$\begin{cases} \dfrac{\nabla^2 U}{U} = -k^2 \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}T}{T} = -k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0 & \text{—(9)} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) + (ck)^2 T(t) = 0 & \text{—(10)} \end{cases}$$

(10) の解として、 $T(t) = e^{-i(ck)t}$

$$= e^{-i\omega t}$$

(9) の解として、

$$U = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

平面波の解

$$E = UT = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

○ 平面波以外の解

$$U(x,y,z) = \psi(x,y,z)\, e^{ikz} \quad -(11)$$

$$(\nabla^2 + k^2)\psi e^{ikz} = 0$$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{d^2 f(x)}{dx} + 2\frac{df(x)}{dx}\frac{dg(x)}{dx} + f(x)\frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right)$$

を使って

$$\Rightarrow \underline{\left(\nabla^2\psi + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\psi\right)e^{ikz} = 0} \quad -(12)$$

○ 近軸近似

$\psi(x,y,z)$ の $z$ に沿った変化量が

場の大きさよりも小さい

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \delta z \ll |\psi|$$

$\delta z$ が波長

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \lambda \ll |\psi|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \ll k|\psi| \quad \text{(}2\pi\text{ は無視)}$$

オーダーで考えている

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right| \ll k\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|$$

一方で x-y 方向においては変化量が小さくない

つまり

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|$$

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|$$

と考える.

(12) から $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ の項が落とせる.

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\} \underline{e^{ikz}} = 0$$

$e^{ikz}$ は恒等的に 0 ではない

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y,z) + 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

近軸波動方程式

☆ 軸対称な式に書き換え
→ 円筒座標

$$\begin{cases} x \to r\cos\theta \\ y \to r\sin\theta \\ z \to z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$ より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}\right)\psi + 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

↓ 軸対称な $\psi$ を仮定

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi + 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

－(☆)

☆ 解の形がガウシアン分布になっていると仮定

$$\psi_0 \propto f(z)\exp\left(-\frac{kr^2}{g(z)}\right)$$

－⑬

⑬を⑧に代入して整理すると

$$\underbrace{\left(1+i\frac{\partial g_{(z)}}{\partial z}\right)}_{=0}\frac{k^2 r^2}{g^2_{(z)}}+2k\underbrace{\left(i\frac{1}{f_{(z)}}\frac{\partial f_{(z)}}{\partial (z)}-\frac{1}{g_{(z)}}\right)}_{=0}=0$$

$$\therefore \begin{cases} 1+i\dfrac{\partial g_z}{\partial z}=0 & \text{—⑭} \\ i\dfrac{1}{f_{(z)}}\dfrac{\partial f_{(z)}}{\partial z}-\dfrac{1}{g_{(z)}}=0 & \text{—⑮} \end{cases}$$

⑭ $\quad g_{(z)}=iz+C$

⑮に代入

$$\frac{\partial f_{(z)}}{\partial z}=-i\frac{f_{(z)}}{iz+C}=\frac{f_{(z)}}{-z+iC}$$

$$f_{(z)}=-D\frac{z+iC}{z^2+C^2}$$

$$\psi_0=-D\frac{z+iC}{z^2+C^2}\exp\left(-\frac{kr^2}{2(iz+C)}\right) \quad \text{—⑯}$$

$$f(z) = -D\,\frac{z+iC}{z^2+C^2}$$

$$= -\frac{D}{C}\,\frac{z/C+i}{(z/C)^2+1} = i\,\frac{D}{C}\,\frac{i\frac{z}{C}-1}{(z/C)^2+1}$$

分子を複素数の偏角と大きさに書き直すと

$$i\frac{z}{C}-1 = \sqrt{1+\left(\frac{z}{C}\right)^2}\,\exp\left\{i\arg\left(i\frac{z}{C}-1\right)\right\}$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{z}{C}\right)^2}\,\exp\Big[-i\,\underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{z}{C}\right)}_{\eta(z)}\Big]$$

定数倍なので省略

$$f(z) = \underbrace{i\frac{D}{C}}_{\text{定数倍なので省略}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{C}\right)^2}}\,\exp(-i\eta(z))$$

(4)より

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{C}\right)^2}}\exp(-i\eta(z))\exp\left(-\frac{kr^2}{2(iz+C)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{C}\right)^2}}\exp\left[-\frac{kCr^2}{2(z^2+C^2)}+\frac{ikzr^2}{2(z^2+C^2)}-i\eta(z)\right]$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}} \exp\left[-\frac{kcr^2}{2(z^2+c^2)} + \frac{ikzr^2}{2(z^2+c^2)} - i\eta_{(z)}\right]$$

ここで $w_0 = \sqrt{\frac{2c}{k}}$, $w_{(z)} = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}$

$R_{(z)} = z\left(1+\left(\frac{c}{z}\right)^2\right)$ を代入して、

$$u = \psi e^{ikz}$$

$$= \frac{w_0}{w_{(z)}} \exp\left(-\frac{r^2}{w_{(z)}^2}\right) \times \exp\left(\frac{ikr^2}{2R_{(z)}}\right)$$

$$\times \exp i\left(kz - \eta_{(z)}\right)$$

ガウシアンビームの式