5/29(水) 16:00〜17:00

干渉計セミナー② ガウシアンビームの特性

教科書（レクチャー全体）

* レーザー物理入門(霜田光一, 岩波書店)
* 重力波物理の最前線(川村静児, 共立出版)

他におすすめの教科書

* Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis(Jolien D. E. Creighton)
(重力波探索手法のことも詳しい)
* 安東さんの修士論文 https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/ando_m.pdf (干渉計制御について詳しい)

■ 今年度の干渉計セミナー

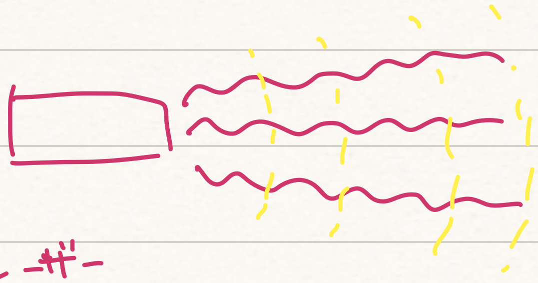
https://gwwiki.icrr.u-tokyo.ac.jp/JGWwiki/KAGRA/IFOBasicLec/2024Basic_lecture

■ 過去の干渉計セミナー

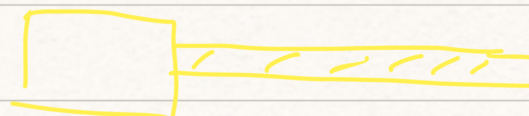
https://gwwiki.icrr.u-tokyo.ac.jp/JGWwiki/KAGRA/IFOBasicLec/2022Basic_lecture

○ガウシアンビームとは.

「レーザー物理入門」のp.62~に式変形がある



レーザー



基本的には平面波

十分遠方にいくにつれて.

回折の影響で球面波に近づく

⇒ ガウシアンモデル

○Gaussianビームの表式

$\longrightarrow z$

ω : 角周波数

k : 波数.

$$E(t, x, y, z) = U(x, y, z) \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

Hermite 多項式と Gaussian 分布の積で表されるモードを

Hermite - Gaussian モード とよぶ

規格化された Hermite - Gaussian モードの表式は

$$U_{lm}(x,y,z) = U_l(x,z)\cdot U_m(y,z) \times \exp\left[-ikz + i(l+m+1)\zeta(z)\right]$$

ここで、

$l, m = 0, 1, 2 \ldots$

積になってる

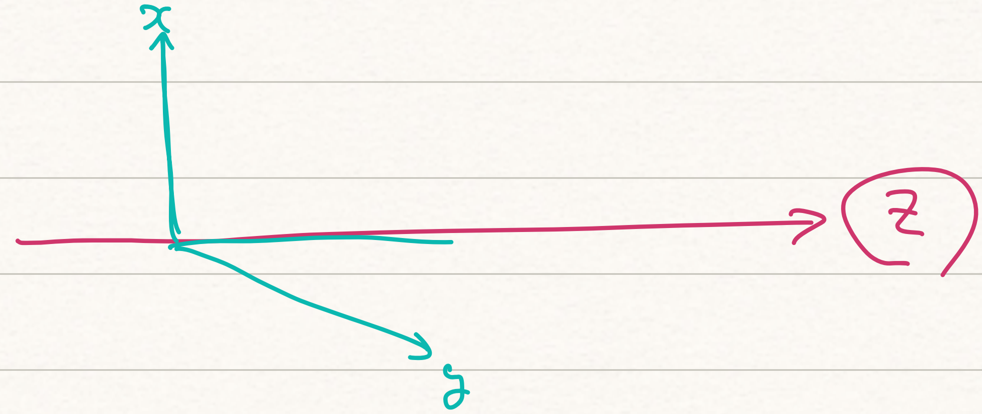
Hermite 多項式

$$U_l(x,z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} \cdot H_l\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w(z)}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R(z)}\right]$$

Gauss 分布

(川村さんの教科書 式(4.68))

$$U_m(y,z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^m m!}} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{w(z)}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{y}{w(z)}\right)^2 - i\frac{ky^2}{2R(z)}\right]$$



$H_l(x)$: Hermite 多項式

$H_0(x)=1$. $H_1(x)=2x$. $H_2(x)=4x^2-2$

ω : 角周波数

k : 波数.

w_0 : ウエスト半径.

$z_0=\dfrac{kw_0^2}{2}$: Rayleigh レンジ

$w(z)=w_0\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}$: ビーム半径

$R(z)=z\left[1+\left(\dfrac{z_0}{z}\right)^2\right]$: 波面の曲率半径

$\eta(z)=\arctan\left(\dfrac{z}{z_0}\right)$: Gouy 位相

○基本モード

$l=m=0$ のことを 基本Gaussian モード. TEM00 モードとよぶ

$$U_{00}(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \cdot \exp\left[-i\left(kz - \eta(z)\right) - (x^2+y^2)\left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)}\right)\right]$$

$$x^2+y^2 = w^2$$

$$\Downarrow$$

$$1/e$$

○ 高次モード

$l > 0$, $m > 0$ のことを高次モードと呼ぶ

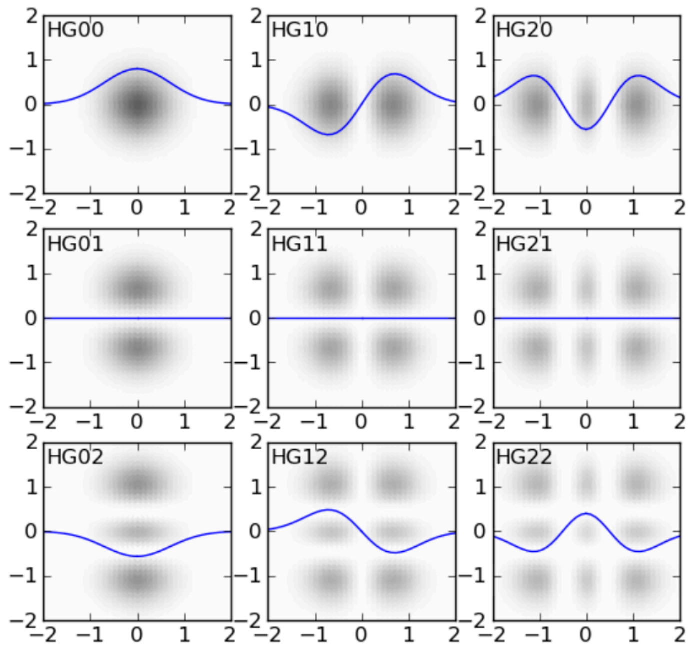


図 2: Hermite-Gaussian モードの強度分布と電場振幅

青線 = $y=0$ における電場振幅

$$U_{lm}(x,y,z) = U_l(x,z) \cdot U_m(y,z)$$

$$\times \exp\left[-ikz + i(l+m+1)\eta(z)\right]$$

U_{00} を使って書き直すと…

$$U_{lm}(x,y,z) = \sqrt{\frac{1}{2^l \cdot l! \, 2^m \cdot m!}} \cdot H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2}\cdot y}{w(z)}\right)$$

$$\times \underline{\underline{\exp\left[i(l+m)\cdot\eta(z)\right]}} \cdot U_{00}(x,y,z)$$

Guoy位相は，高次モードと位相差を表している．

○ビームウエスト

ここ

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$ ：ビーム半径

w_0：z=0でのビーム半径．特にビームウエストと呼ぶ

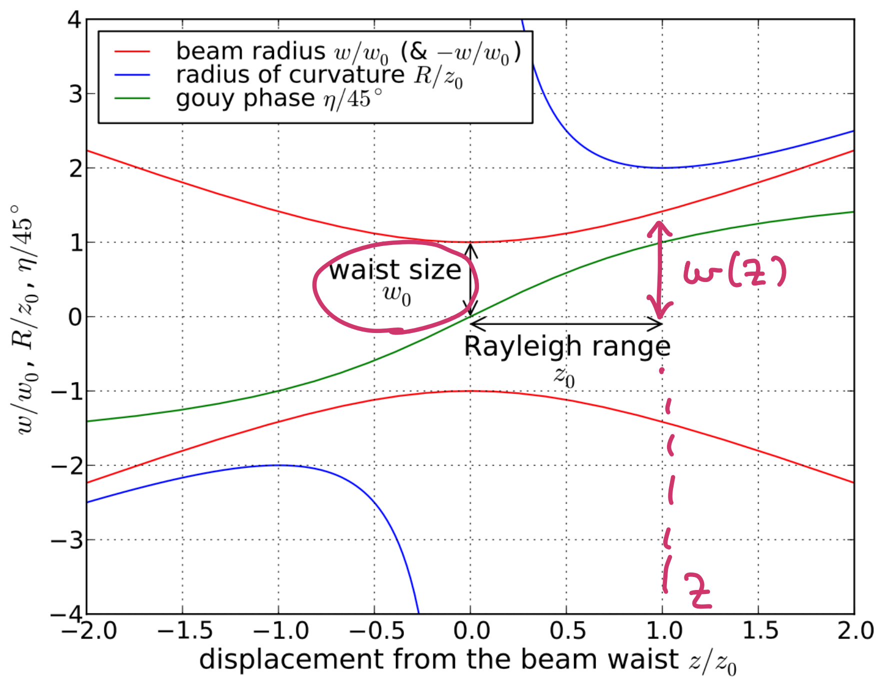


図 1: Gaussian ビームのビーム半径 $w(z)$、波面の曲率半径 $R(z)$、Gouy 位相 $\zeta(z)$

○ Rayleigh レンジ と Gouy 位相

フランス：グイ
英語 ：ゴイ

||

レーザー光が平面波と見なせる距離

Rayleigh レンジを越えると、球面波のふるまいをする

$$z_0 = \frac{k w_0^2}{2} \quad : \text{Rayleigh レンジ}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad : \text{ビームの半径}$$

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad : \text{Gouy 位相}$$

○ 曲率半径

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad : \text{波面の曲率半径}$$

$z = 0$ のとき、 $R(z) \to \infty$

⇒ ビームウエストの位置では、波面は平面

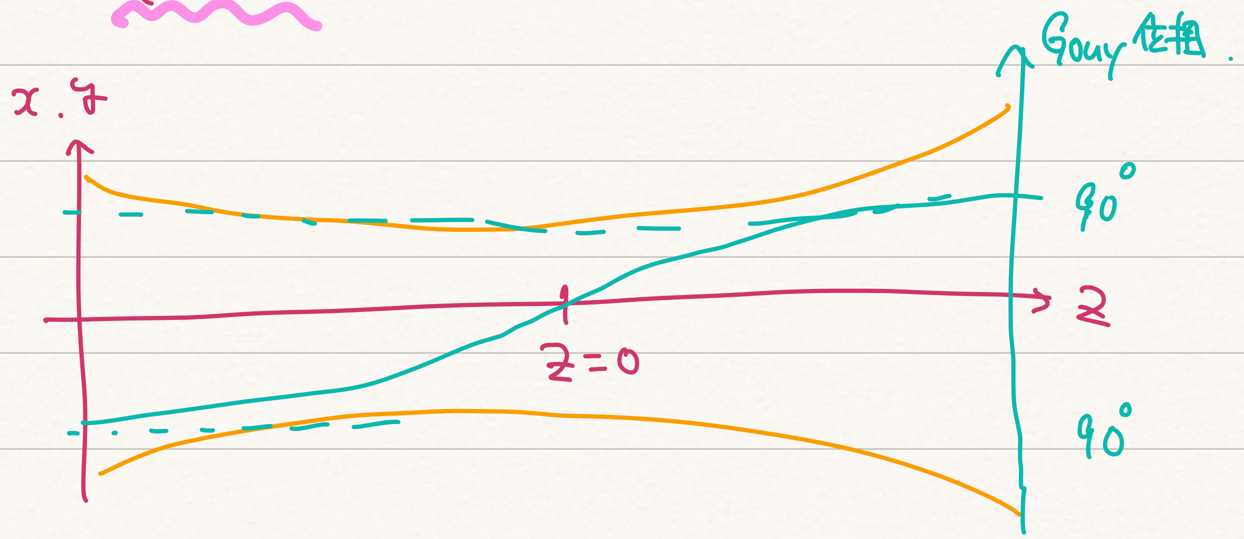
$z \to$ 大 のとき、 $R(z)$ が有限の値。

⇒ ビームウエストの位置から、十分遠方では

波面は曲率をもつ ⟹ 球面波

○ Gouy 位相

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$$: Gouy 位相



$z \to$ 大 のとき　$\eta(z) \to 90°$

$z \to 0$ のとき.　$\eta(z) \to 0°$