

重力波初観測と干渉計構成

国立天文台 辰巳大輔

Version: 2.0 [平成 19 年 10 月 16 日]

重力波検出器建設の最大の目標は、「世界で初めて重力波信号を直接検出すること」であり、この目的のために我々が有力視している重力波源は、中性子連星の合体である。理由は、(1) 間接的ではあるが、重力波放出が証明されている (2) 重力波波形が理論的に良く予言されており、検出器雑音の誤認率が少ないと期待される ことが挙げられる。

ここでは、重力波検出器でどこまで直接検出に迫れるのか議論する。

1 観測される中性子連星合体イベント数の推定

観測される中性子連星合体イベントの期待値 N_{NS} は

1. 銀河あたりの合体頻度 $\mathcal{R}$
2. 銀河の数密度 ρ_{galaxy}
3. 重力波検出器 1 台で探査可能な体積 $V_{\text{eff}} = \frac{4\pi}{3} r_{\text{eff}}^3$

の積で表され、それぞれの推定値は表 1 に示した通りである。

表 1: 観測される中性子連星合体イベントの期待値 N_{NS}

銀河あたりの合体頻度	$\mathcal{R}$	Myr^{-1}	83^{+209}_{-66}	信頼度 95%
銀河の数密度	ρ_{galaxy}	Mpc^{-3}	$(1.4 \pm 0.2) \times 10^{-2}$	
探査可能な体積	V_{eff}	Mpc^3	1.83×10^6	$(r_{\text{eff}} = 76 \text{ Mpc})$
イベント数	N_{NS}	events / year	$2.2^{+5.6}_{-1.8}$	

これらから、観測される中性子連星合体イベントは『最頻値が **2.2 events/year**、信頼度 95 % では **0.4 – 7.8 events/year**』と推定される。

表 2: 銀河あたりの合体頻度推定の系統誤差と統計誤差：モデル毎の推定値を表に纏めた。
表 1 で採用した値は Model=6 である。各モデル計算での誤差は 95% C.L. での統計誤差
を示す。因みに表 1 の N_{NS} では ρ_{galaxy} の誤差も考慮されている。

Model	$\mathcal{R}$ Myr^{-1}	N_{NS} events / year
1	$23.2^{+59.4}_{-18.5}$	$0.6^{+1.6}_{-0.5}$
6	$83.0^{+209.1}_{-66.1}$	$2.2^{+5.6}_{-1.8}$
9	$7.9^{+20.2}_{-6.3}$	$0.2^{+0.5}_{-0.2}$
10	$23.3^{+57.0}_{-18.4}$	$0.6^{+1.5}_{-0.5}$
12	$9.0^{+21.9}_{-7.1}$	$0.2^{+0.6}_{-0.2}$
14	$3.8^{+9.4}_{-2.8}$	$0.1^{+0.2}_{-0.1}$
15	$223.7^{+593.8}_{-180.6}$	$5.9^{+15.8}_{-4.8}$
17	$51.6^{+135.3}_{-41.5}$	$1.4^{+3.6}_{-1.1}$
19	$14.6^{+38.2}_{-11.7}$	$0.4^{+1.0}_{-0.3}$
20	$89.0^{+217.9}_{-70.8}$	$2.4^{+5.8}_{-1.9}$

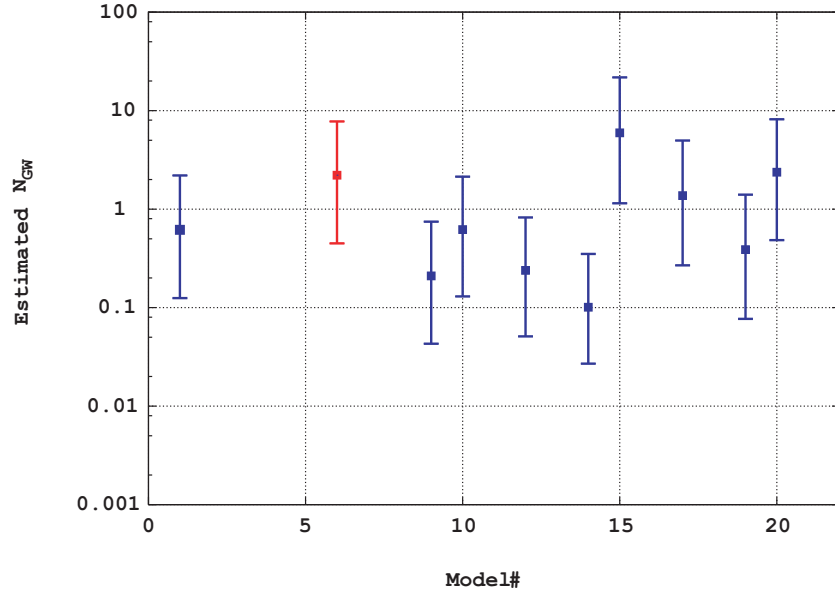


図 1: 銀河あたりの合体頻度推定の系統誤差と統計誤差：この図より系統誤差まで考慮すると、観測される中性子連星合体イベントは 0.02 – 20 events/year 程度推定できる。

2 検出器 1 台だけの場合の検出閾値と上限値

1 台の検出器だけで重力波信号を検出しようとする時、我々が示すべき実験結果は、観測数 N_{obs} と false alarm probability から決まる閾値 N_{th} である。

[false alarm]

データが雑音だけの場合に、重力波が来たと主張すること

[false alarm probability の定義]

データが雑音だけの場合、観測数 n は確率分布 p_o に従うとする。

この時、ある Γ という区間の false alarm が起きる確率 P_0

$$P_0 = \int_{\Gamma} p_o(n) dn$$

が false alarm probability である。

false alarm の確率が小さければ重力波を含む可能性があるとは判断出来る。つまり我々が重力波を検出したと主張する時、雑音イベントが 0 (もしくは期待値 1 以下) である必要はない。雑音イベントの期待値が 1 より大きくとも、false alarm probability が小さければ重力波信号を初検出したと主張することが出来る。

ではどのくらい確率が小さければ良いのであろうか。1 つの目安として良く使われる数字は 0.27 % である。これはガウス統計に従う雑音が平均値から 3σ 以上離れる (大きい、もしくは小さい) 確率に等しい。

このような条件を満たさない場合は、重力波イベント数に対して上限値 (Upper Limit) を設けることになる。

2.1 検出閾値の設定

雑音イベントの期待値が 10 events/year の時、
「1 年間の観測数が N_{th} 以上となる false alarm が起きる確率を 0.27 % 以下」
とする N_{th} を計算してみよう。

(1) 1 年間で観測される雑音イベントの期待値

$$\langle N_{\text{BG}} \rangle = 10 \text{ events/year} \times 1 \text{ year} \quad (1)$$

(2) 観測される雑音イベントの数 n はポアソン分布 $\mathcal{P}$ に従う

$$\mathcal{P}(n; \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}, \quad \mu \equiv \langle N_{\text{BG}} \rangle \quad (2)$$

(3) 観測数 N_{obs} が N_{th} 以上となる false alarm probability P_0

$$\begin{aligned} P_0(N_{\text{obs}} \geq N_{\text{th}}) &= \int_{N_{\text{th}}}^{\infty} \mathcal{P}(n; \langle N_{\text{BG}} \rangle) dn \\ &= 1 - \int_0^{N_{\text{th}}} \mathcal{P}(n; \langle N_{\text{BG}} \rangle) dn \leq 0.0027 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\therefore \int_0^{N_{\text{th}}} \mathcal{P}(n; \langle N_{\text{BG}} \rangle) dn \geq 0.9973 \quad (4)$$

この条件の時、 $N_{\text{th}} = 20$ である。この閾値は雑音イベントの期待値に依っており、表 3 に纏めた通りである。

表 3: 雑音イベントの期待値 $\langle N_{\text{BG}} \rangle$ と検出閾値 N_{th}

$\langle N_{\text{BG}} \rangle$	0.075	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
N_{th}	1	2	3	5	7	12	20	33

『 $N_{\text{obs}} \geq N_{\text{th}}$ であれば、検出器雑音と考えにくいイベントを観測した可能性が高い。』
と言える。

2.2 初検出の可能性

重力波イベントの期待値が $\langle N_{\text{GW}} \rangle$ 、雑音イベントの期待値が $\langle N_{\text{BG}} \rangle$ の時、観測数が閾値を超える ($N_{\text{obs}} \geq N_{\text{th}}$) 確率 P は下記のように表すことが出来る。

$$P(N_{\text{obs}} \geq N_{\text{th}}) = \sum_{N=N_{\text{th}}}^{\infty} P(N_{\text{obs}}) = 1 - \sum_{N=0}^{N_{\text{th}}-1} P(N_{\text{obs}}) \quad (5)$$

$$N_{\text{obs}} = N_{\text{BG}} + N_{\text{GW}} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P(N_{\text{obs}}) &= \sum \mathcal{P}(N_{\text{BG}}; \langle N_{\text{BG}} \rangle) \times \mathcal{P}(N_{\text{GW}}; \langle N_{\text{GW}} \rangle) \\ &= \sum_{N_{\text{BG}}=0}^{N_{\text{obs}}} \mathcal{P}(N_{\text{BG}}; \langle N_{\text{BG}} \rangle) \times \mathcal{P}(N_{\text{obs}} - N_{\text{BG}}; \langle N_{\text{GW}} \rangle) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\mathcal{P}$ は式 (2) に示したポアソン確率分布である。

図 2: 雑音イベントの期待値が $\langle N_{\text{BG}} \rangle$ 、重力波イベントの期待値が $\langle N_{\text{GW}} \rangle$ の時、観測数が閾値を超える ($N_{\text{obs}} \geq N_{\text{th}}$) 確率 P を色調で表現した。

例えば、

『 $\langle N_{\text{GW}} \rangle = 12.6$ 、 $\langle N_{\text{BG}} \rangle = 10.0$ の時、初検出に成功する確率は 66% 』¹ となる。

¹ 1 年間の観測での話：2 年間観測すれば 96.4%、3 年間観測すれば 99.7% となる。

表 4: 雑音イベントの期待値が $\langle N_{\text{BG}} \rangle$ 、重力波イベントの期待値が $\langle N_{\text{GW}} \rangle$ の時、観測数が閾値を超える ($N_{\text{obs}} \geq N_{\text{th}}$) 確率 P

		$\langle N_{\text{BG}} \rangle$							
		0.075	0.9	10	20	30	40	50	64
$\langle N_{\text{GW}} \rangle$	2.2	64.7	20.2	1.4	1.2	0.8	0.6	0.6	0.6
	4.4	93.4	61.0	6.0	3.8	2.4	1.5	1.3	1.3
	6.6	99.0	86.8	16.8	9.4	5.5	3.3	2.7	2.5
	8.8	99.9	96.5	33.6	18.8	11.0	6.6	5.2	4.6
	11.0	100	99.2	52.9	31.8	19.3	11.9	9.2	7.7
	12.6	—	99.7	66.0	42.6	27.0	17.0	13.1	10.8
	25.2	—	100	99.6	96.4	88.1	75.7	65.9	56.5
	37.8	—	—	100	100	99.7	98.4	96.2	92.4
	50.4	—	—	—	—	100	100	99.9	99.5
	52.6	—	—	—	—	—	—	99.9	99.7
N_{th}		1	4	20	33	46	59	71	87

逆に『 $\langle N_{\text{GW}} \rangle = 12.6$ の時、99.73% で成功するには $\langle N_{\text{BG}} \rangle = 0.9$ 以下』にするか、もしくは3年間観測して『 $\langle N_{\text{GW}} \rangle = 37.8$ 、 $\langle N_{\text{BG}} \rangle = 30.0$ 』としなければならない。

さらに、 $\langle N_{\text{GW}} \rangle \leq 12.6$ の時には $\langle N_{\text{BG}} \rangle \ll 0.9$ となっていることが望ましいが、1台の干渉計でこのような雑音イベントの期待値であることを示すのは困難であると考えられる。

理由は、雑音イベント期待値を1年に1イベント以下に抑えることが不可能であるからではない。このような期待値であることを保証することが困難であるからである。例えば、今までは $\langle N_{\text{BG}} \rangle$ は統計的に非常に良く定まっており、またその確率分布は統計学の予言に従うという前提の下で話を進めてきたが、実際の解析においては解析手法や検出器の非定常性に起因する系統誤差が存在し、これが統計誤差を上回る場合には必ずしも今までの話の通りとならないからである。

過去の TAMA 検出器を用いた 1000 時間規模の観測の経験から言っても雑音の期待値が 1 events/year 以下であると保証することは極めて難しいと判断する。そこで我々は2台の同等な感度を有する検出器により、雑音イベントの期待値を激減させると共に、期待値の推定誤差も低減し、重力波検出の有無を純粋な統計学により議論できるようにすることを目指す。

2.3 上限値 (Upper Limit) の設定

雑音イベントの期待値 $\langle N_{BG} \rangle$ と観測イベント数 N_{obs} が与えられた時、信頼度 (confidence level = $C.L.$) が以下の条件となる重力波イベントの期待値 $\langle N_{GW} \rangle$ を以って上限値とする。

$$\begin{aligned}
 1 - C.L. &= \frac{(\text{雑音 + 重力波と仮定した時、観測イベントが } N_{obs} \text{ 以下である確率})}{(\text{雑音だけと仮定した時、観測イベントが } N_{obs} \text{ 以下である確率})} \\
 &= \frac{\sum_{n=0}^{N_{obs}} \mathcal{P}(n; \langle N_{BG} \rangle + \langle N_{GW} \rangle)}{\sum_{n=0}^{N_{obs}} \mathcal{P}(n; \langle N_{BG} \rangle)} \quad (8)
 \end{aligned}$$

例えば、 $\langle N_{BG} \rangle = 10.0$ 、観測イベント数 $N_{obs} = 19$ の時、

『重力波イベントは、信頼度=90% で 15.9 events 以下』

であったと推測できる。

実際は観測イベント数 N_{obs} に依って上限値が変わるので、その相関を図 3 に纏めた。上限値以上の斜線領域の重力波イベント数は exclude される。また、1 章で述べた信頼度 95% での重力波イベントの期待値を赤い領域で示した。この図から、1 年間の観測で重力波を検出することが出来ない場合でも、信頼度 95% で予想される重力波イベント数の大部分を exclude 出来ることが分かる。

図 3: $\langle N_{BG} \rangle = 10.0$ 、信頼度 = 90% における観測イベント数 N_{obs} と上限値 N_{upper} :

上限値以上の斜線領域の重力波は exclude される。また、1 章で述べた信頼度 95% での重力波イベントの期待範囲を赤い領域で示した。この図から、1 年間の観測で重力波を検出することが出来ない場合でも、信頼度 95% で予想される重力波イベント数の大部分を exclude 出来ることが分かる。

3 2 台の検出器のアンテナパターンと距離

2 台の検出器を建設する場合、どのようなアンテナパターンの組み合わせが最適であろうか？また 2 台の検出器はどのくらい離れているのが最適であろうか？この節では、この問題について議論する。

議論の前に、最適であるとはどういうことが考えてみる。最適とは『重力波信号と雑音の分離度を最大にすること』と言い換えることが出来る。ということは、最適配置はアンテナパターンや距離の他に解析方法によっても変わりうるということが容易に想像できる。そこで、ここでは『**コインシデンス解析に対する**』最適配置について議論することにする。

3.1 コインシデンス解析の場合

コインシデンス解析では、各々の検出器出力を Matched Filter 解析し、解析出力がある閾値を超えたイベントについて、2 台が同一重力波信号を捕らえたか否かを検証する。

(1) 同一サイトの 2 台の干渉計の場合

1 台目の干渉計の腕共振器の方向をそれぞれ $X - Y$ 、2 台目を $X' - Y'$ とする。 Z 軸は鉛直方向である。2 台目の干渉計を水平面内で $\Delta\phi$ 回転させてゆき、最適配置を探すことにする。

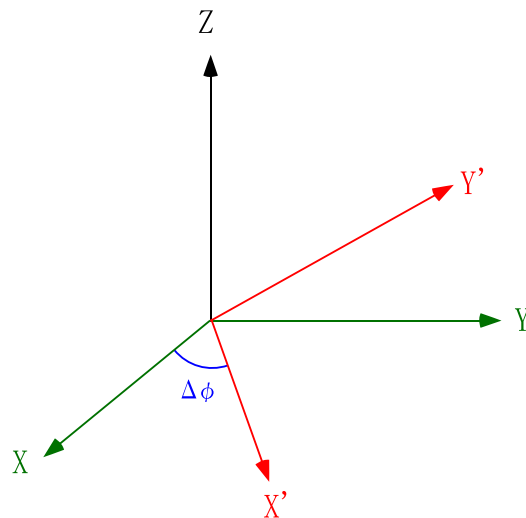


図 4: 同一サイトの 2 台の干渉計：水平面内で 2 台の干渉計の回転させて最適な配置を探す。1 台目の干渉計の腕共振器の方向をそれぞれ $X - Y$ 、2 台目を $X' - Y'$ とする。 Z 軸は鉛直方向である。

[2 台の干渉計で共に重力波を検出する確率]

開角 $\Delta\phi$ が 0 度の場合、2 台の干渉計は同じアンテナパターンを持つので同じ大きさの重力波信号を受けることが出来る。反面、不感領域から重力波が入射すると両方とも感度を持たない。これに対して開角を 45 度にとると、片方が不感でも他方が感度を持つため相補的と言える。しかしながら、定量的にどちらがコインシデンス解析に適しているか、直感的に判断することは難しい。

そこで、最適な配置の評価には、

『 1 年間で 2 台の干渉計ともに $SNR \geq 10$ を超える重力波イベントの期待値 』
を指標とした。

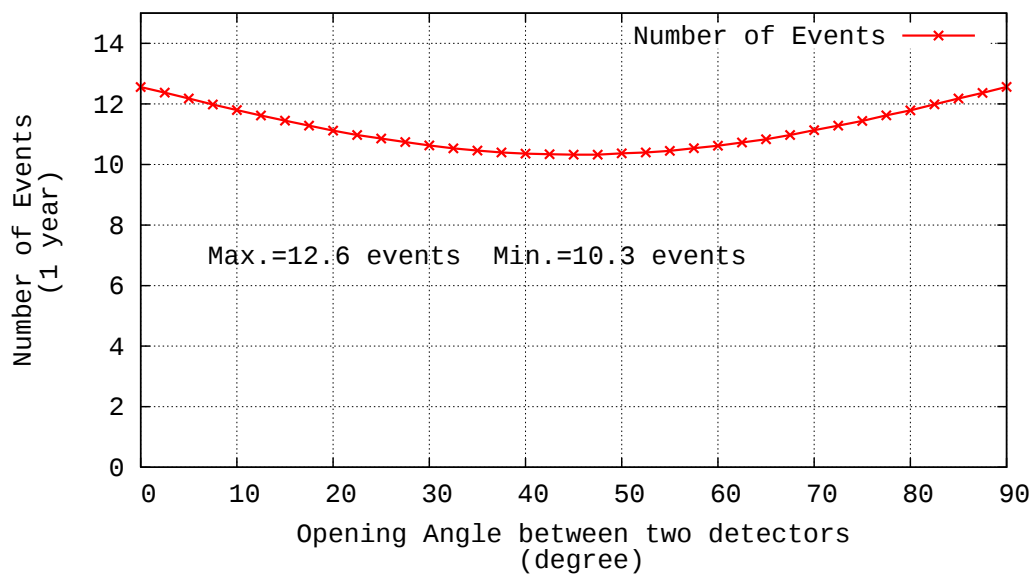


図 5: 2 台の検出器の開角 (Opening Angle = $\Delta\phi$) と期待される重力波イベント数 : $\Delta\phi = 0$ 度で最大値 12.6 events、最小値は $\Delta\phi = 45$ 度で 10.3 events であった。

シュミレーションによる評価の結果を示したのが図 5 である。開角が 0 度の時に最大値 12.6 events、45 度の時に最小値 10.3 events となった。シュミレーションは約 4×10^5 年相当行ったのでこの差 20% は有意であると判断できる。

[同一重力波信号であることの検証]

コインシデンス解析の場合、2 台の干渉計で閾値 10 を超えたイベントに対して同一重力波イベントであるか否かを検証する。検証の評価パラメーターは、到来時間、 SNR 、チャープ質量、質量比の 4 点である。表 5 に検出器構成と有効な評価パラメーターを纏めた。同一サイトで同じ向きであれば、4 つのパラメーター全てについて検証することが可能であり、雑音除去能力が高いと言える。

表 5:

距離	同一 or 近接		遠隔
開度	0	$\neq 0$	0
到来時間	○	○	
SNR	○		
チャープ質量	○	○	○
質量比	○	○	○

では開度が 0 度以外の場合、2 台の検出器でどれくらい SNR に差が生じるかシュミレーションしてみた。条件は『 2 台の検出器ともに $SNR \geq 10$ を満たしたイベントについて、 SNR 比の平均値と分散 』を計算する。結果は図 6 に示す通りとなった。

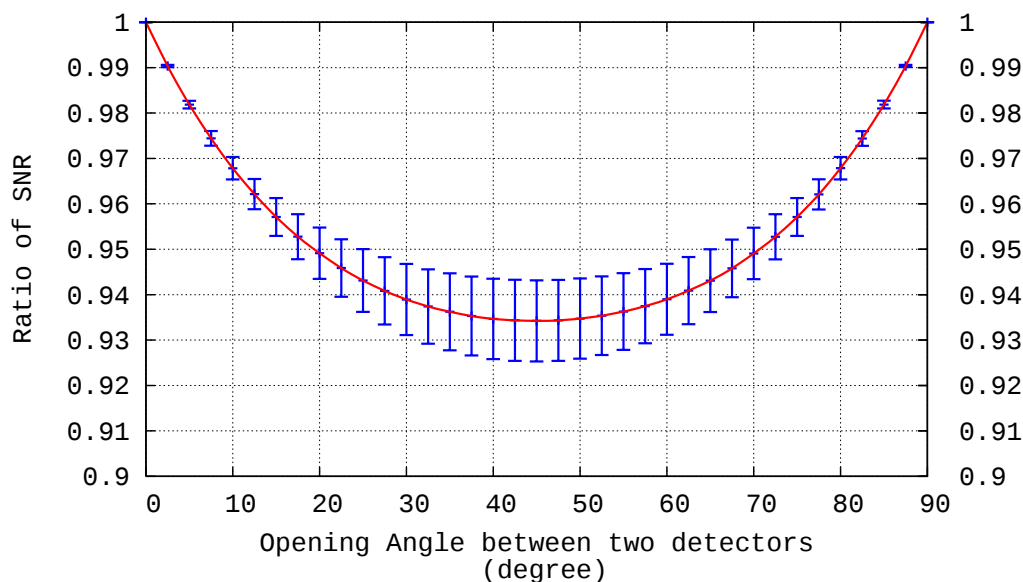


図 6: 2 台の検出器ともに $SNR \geq 10$ を満たしたイベントについての SNR 比の平均値と分散

以上のことから、『 開度=0 度が最適 』であることが分かる。

[遠隔地の場合]

遠隔地の場合は、前述に加えて到来時間に差が生じる。時間差が最大となるのは、2つの検出器間を結ぶ方向から重力波が入射した時で

$$\Delta t_{\max} = \frac{\Delta L}{c} \quad (9)$$

ここで ΔL は2つの検出器間の距離である。

逆に時間差が最小となるのは同一サイトであるが、到来時刻の決定精度 δt が有限なため、時間差に対する許容値 T_{window} は 0 sec にはならない。中性子連星合体の場合、時刻の決定精度は $\delta t = 0.5$ ms 程度で、重力波イベントを間違えて除去しないように $3 \delta t$ を許容値として採用する。従って

$$\begin{aligned} T_{\text{window}} &= \sqrt{\Delta t_{\max}^2 + (3 \delta t)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{c}\right)^2 + (3 \delta t)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

雑音イベントが偶然に時間的な一致を見せる確率 (false alarm probability) は時間差の許容値 T_{window} に比例すると考えられる。そこで、2台の検出器間の距離 ΔL の関数として T_{window} をプロットしたのが、図7である。

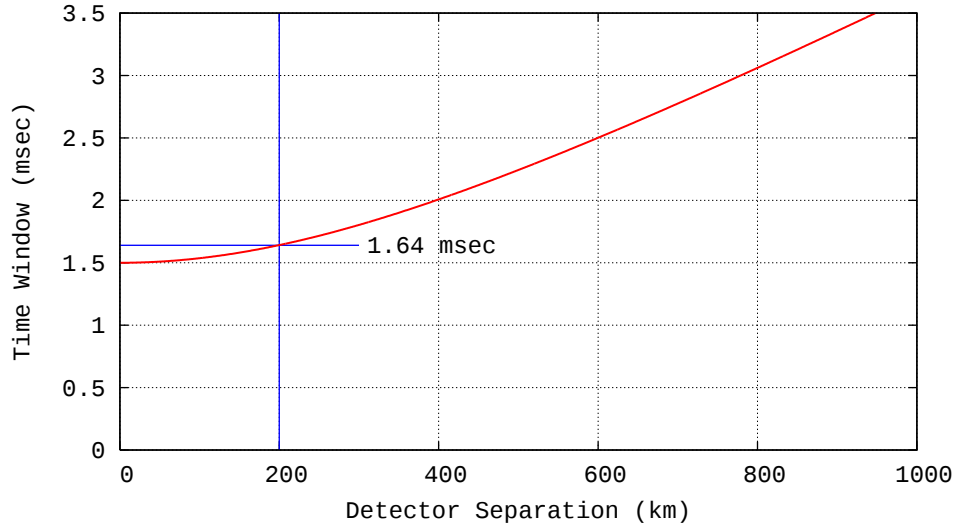


図 7:

『 検出器間距離が 200 km だと false alarm probability を 10 % 悪化させる 』と推定出来る。

3.2 結論

コインシデンス解析の場合、最適な干渉計配置は
『 2 台が同じ指向性を持ち、200 km 以内に設置される場合 』
であると結論できる。

A 実効検出距離

ある期間 T_{obs} [yr] に検出される重力波イベントの数 N_{obs} は、中性子連星合体の頻度 $\mathcal{P}$ [$\text{Mpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$] と²、実効的に探査できた体積 $\frac{4\pi}{3} r_{\text{eff}}^3$ によって、下記のように書くことが出来る。

$$N_{\text{obs}} = \frac{4\pi}{3} r_{\text{eff}}^3 \times \mathcal{P} \times T_{\text{obs}} \quad (11)$$

このことより、実効検出距離を

$$\therefore r_{\text{eff}} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N_{\text{obs}}}{\mathcal{P} T_{\text{obs}}} \right)^{1/3} \quad (12)$$

と定義する。実効検出距離は検出条件（検出器雑音、解析方法、閾値など）に依って変わるのので、『ある検出条件下での実効検出距離』と言う言い方が正確である。

[検出条件]

信号雑音比 (SNR) が 10 以上となった場合を検出できたとする。

[検出器雑音]

SNR は検出器の雑音によるので、まずこれについて仮定を置くことにする。距離 $r = 240$ Mpc で中性子連星の合体が起こり重力波が放射され、放射パターンの最大方向（連星の公転軌道面の法線方向）に地球があり、且つ検出器の最大感度方向（天頂方向）から入射した場合に、 $SNR = 10$ となる雑音を持つと仮定する。これは、 $SNR = 10$ で検出できる最大距離が 240 Mpc であると言い換えることが出来るので、以下では $r_{\text{max}} = 240$ Mpc とする。

²空間的に一様に発生すると仮定する。

[重力波の放射パターン]

$$H_+(\iota) = \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \quad (13)$$

$$H_\times(\iota) = \cos \iota \quad (14)$$

+ と × はそれぞれ重力の偏波を表している。 ι は連星系の軌道角運動量軸と視線方向のなす角度で H_+ と $H_\times$ は重力波の放射パターンを表している (図 8 参照)。

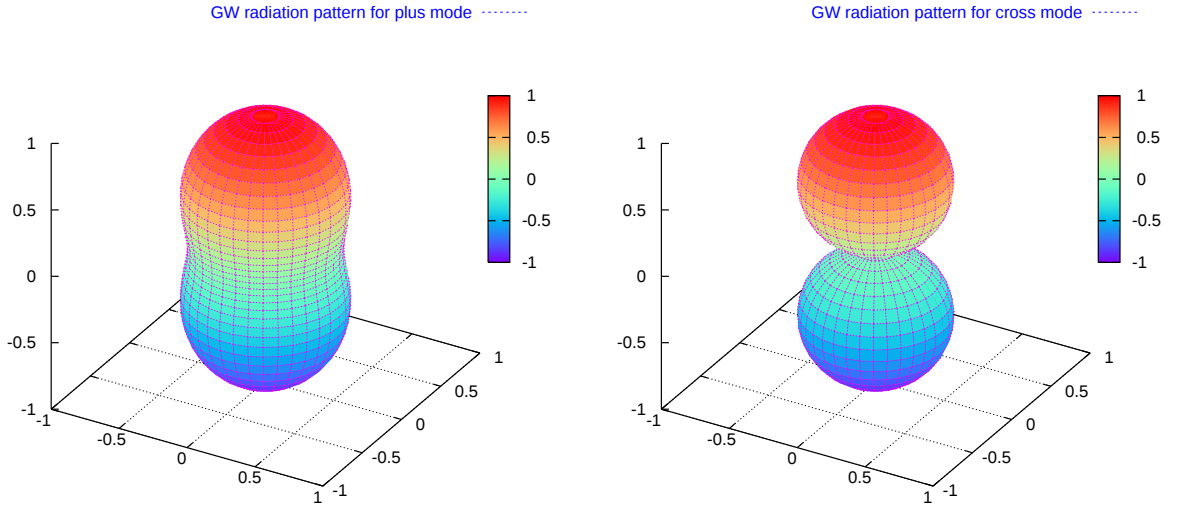
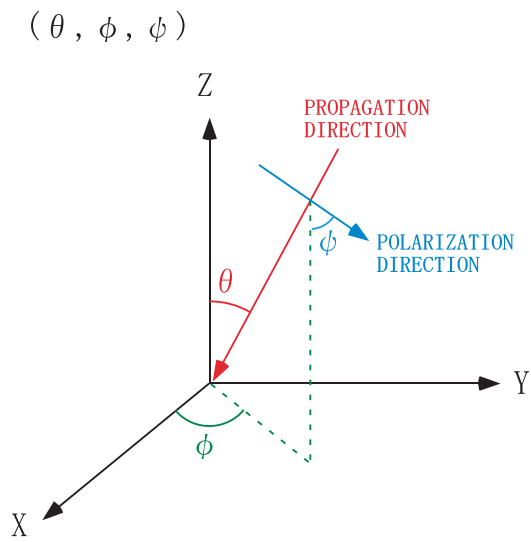


図 8: 連星合体における重力波の放射パターン: xy 平面が連星の公転面である。両偏波ともに z 軸方向で放射が最大となる。

[検出器のアンテナパターン]

$$F_+(\theta, \phi, \psi) = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi \quad (15)$$

$$F_\times(\theta, \phi, \psi) = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos 2\phi \sin 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \cos 2\psi \quad (16)$$



GW antenna pattern for plus mode (blue dotted line)

GW antenna pattern for cross mode (green dashed line)

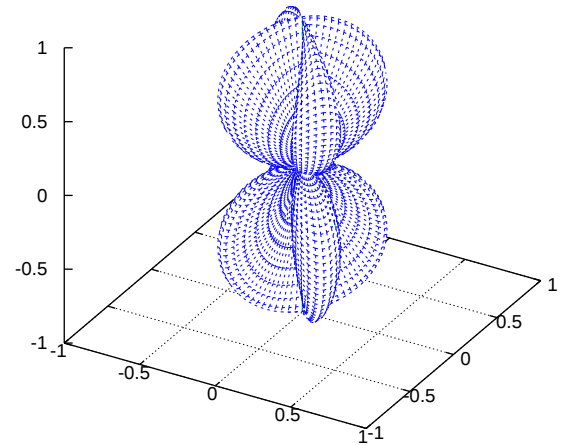
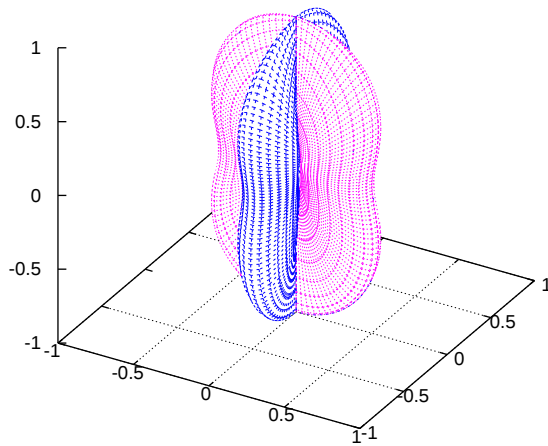


図 9: (a) 重力波の入射方向に関する変数定義
 (b) アンテナパターン (+ モード: $\psi = 0$)
 (c) アンテナパターン ($\times$ モード: $\psi = 0$)

[検出器で観測される重力波波形と信号雑音比]

距離 r Mpc で発生した重力波 h_+ , $h_\times$ を、検出器で観測した波形 h は

$$h = \frac{r_0}{r} \times (H_+ F_+ h_+ + H_\times F_\times h_\times) \quad (17)$$

この時の信号雑音比は Mathed Filter 解析では

$$\begin{aligned} SNR &= \sqrt{\frac{(h \cdot h_+)^2 + (h \cdot h_\times)^2}{2}} \\ &= \frac{r_0}{r \sqrt{2}} \times \sqrt{(H_+ F_+)^2 + (H_\times F_\times)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\therefore (h_+ \cdot h_+)^2 = (h_\times \cdot h_\times)^2 \equiv 1 \quad (19)$$

と書ける。規格化距離 r_0 は、 $r = 240$ Mpc で最適入射 ($H_+ = H_\times = F_+ = F_\times = 1$) の時に $SNR = 10$ と仮定したので

$$10 = \frac{r_0}{240\sqrt{2}} \quad (20)$$

$$\therefore SNR = 10 \times \frac{240}{r} \times \sqrt{(H_+ F_+)^2 + (H_\times F_\times)^2} \quad (21)$$

[重力波事象の発生と観測数 N_{obs}]

連星中性子合体頻度 $\mathcal{P}$ の時、乱数により空間的に一様に重力波発生事象を起こし、軌道傾斜角 ι 、検出器への入射角と偏極の向き θ, ϕ, ψ も乱数で一様に振り、式 (21) の SNR により検出可能か否かを判定し N_{obs} を評価してみよう。

連星合体が起こる位置 (x, y, z) を、 -1 から 1 までの一様乱数により決定する。

$$x = [-1 : 1] \times r_{\text{max}} \quad (22)$$

$$y = [-1 : 1] \times r_{\text{max}} \quad (23)$$

$$z = [-1 : 1] \times r_{\text{max}} \quad (24)$$

この時 $\mathcal{P} = 1 \text{ Mpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ とすると、上記範囲内で 1 年間 ($T_{\text{obs}} = 1 \text{ yr}$) で起こる連星合体の数は、 $\mathcal{P} \times (2r_{\text{max}})^3 \times T_{\text{obs}} = 110592000 \sim 1.1 \times 10^8$ なので、これだけの回数シュミレーションする。

結果、 $SNR \geq 10$ となった事象数は $N_{\text{obs}} = 4984123$ で、これから

$$r_{\text{eff}} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N_{\text{obs}}}{\mathcal{P} T_{\text{obs}}} \right)^{1/3} = 106 \text{ Mpc}$$

$$\frac{r_{\text{eff}}}{r_{\text{max}}} = 0.441525 \dots$$

と求められた。

B 最大検出距離

距離 r 離れたコンパクト連星からの重力波信号は、放射パターン最大方向に地球があり、且つ検出器の最大感度方向から入射したとする最適条件下で、stationary phase approximation を用いて下記のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} h_+(f) &= A f^{-7/6} \exp \{ i \Psi(f) \} \\ h_\times(f) &= i h_+(f) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq f \leq f_{\max} \quad (25)$$

$$h_+(f) = h_\times(f) = 0 \quad \text{otherwise} \quad (26)$$

$$A = \left(-\frac{2c}{r} \right) \left(\frac{GM_\odot}{c^3} \right)^{5/6} \left(\frac{5\mu}{96 M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{\pi^2 M_\odot} \right)^{1/3} \quad (27)$$

$$f_{\max} = \frac{c^3}{6^{3/2} \pi G M} = 1570 \text{ Hz} \times \left(\frac{2.8 M_\odot}{M} \right) \quad (28)$$

放射パターンや検出器感度パターンについては式 (13), (14), (43), (44) の通りである。

[Matched Filter 解析]

$$SNR = \sqrt{\frac{\rho_+^2 + \rho_\times^2}{2}} \quad (29)$$

$$\rho_+ = (s | g_+), \quad \rho_\times = (s | g_\times) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (s | g) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^*(f) g(f)}{S_n(f)} df \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{s^*(f) g(f) + s(f) g^*(f)}{S_n(f)} df \\ &= 4 \Re \left\{ \int_0^{\infty} \frac{s^*(f) g(f)}{S_n(f)} df \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $s(f)$ は検出器出力で検出器雑音 $n(f)$ と重力波の和で書き表すことができる。

$$s(f) = n(f) + h_+(f) + h_\times(f) \quad (32)$$

$S_n(f)$ は検出器雑音のパワースペクトラムである。

$$S_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} n^*(t) n(t+\tau) e^{2\pi f \tau} d\tau \quad (33)$$

また、 $g(f)$ はテンプレートと呼ぶ予想重力波波形で振幅以外は $h(f)$ と変わらないものとする。よってテンプレートの振幅 B は式 (25) における A を置き換えたものと定義する。

実際の解析では、真の重力波信号 $h(f)$ は分からないので、様々なテンプレート波形の中から SNR を最大とする波形を探し出す。

テンプレート波形の大きさ B は、下記のように規格化する。

$$\begin{aligned}
 (g_+ | g_+) &= (g_\times | g_\times) = 1 \\
 &= 4 \left\{ \int_0^\infty \frac{g^*(f) g(f)}{S_n(f)} df \right\} \\
 &= 4 |B|^2 \left\{ \int_0^{f_{\max}} \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right\}
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\therefore B = \left\{ 4 \int_0^{f_{\max}} \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right\}^{-1/2} \tag{35}$$

以上より、 SNR の平均値を求めてみる。

$$\rho_+ = (s | g_+) = (n | g_+) + (h_+ | g_+) + (h_\times | g_+) \tag{36}$$

$$\langle \rho_+ \rangle = \langle (s | g_+) \rangle = \langle (n | g_+) \rangle + \langle (h_+ | g_+) \rangle + \langle (h_\times | g_+) \rangle \tag{37}$$

$$\langle (s | g_+) \rangle = 0 \tag{38}$$

$$\langle (h_\times | g_+) \rangle = 0 \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \langle \rho_+ \rangle &= \langle (h_+ | g_+) \rangle \\
 &= A B \left\{ 4 \int_0^{f_{\max}} \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right\} \\
 &= \frac{A}{B}
 \end{aligned} \tag{40}$$

他方の偏極 $\times$ についても同様であるので、信号雑音比の平均値は

$$\begin{aligned}
 \langle SNR \rangle &= \frac{|A|}{\sqrt{2} |B|} \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{2} c}{r} \right) \left(\frac{GM_\odot}{c^3} \right)^{5/6} \left(\frac{5\mu}{96 M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{\pi^2 M_\odot} \right)^{1/3} \left\{ 4 \int_0^{f_{\max}} \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right\}^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{41}$$

『 最大検出距離を平均信号雑音比が 10 となる距離 』と定義すると、

$$\begin{aligned}
 r_{\max} &= \left(-\frac{\sqrt{2} c}{10} \right) \left(\frac{GM_\odot}{c^3} \right)^{5/6} \left(\frac{5\mu}{96 M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{\pi^2 M_\odot} \right)^{1/3} \left\{ 4 \int_0^{f_{\max}} \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right\}^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{42}$$

C 平均感度：2 乗平均平方根 (RMS)

C.1 アンテナパターンの RMS 値

付録 A で述べたように、干渉計型重力波検出器のアンテナパターンは下記のように書くことができる。

$$F_+(\theta, \phi, \psi) = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi \quad (43)$$

$$F_\times(\theta, \phi, \psi) = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos 2\phi \sin 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \cos 2\psi \quad (44)$$

ここでは、アンテナパターンの 2 乗平均によりその指向性について考える。

(1) 偏極方向 ψ に関する平均化

$$\begin{aligned} \langle F_+^2 \rangle |_\psi &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_+^2 d\psi \\ &= \frac{1}{8} \left\{ (1 + \cos^2 \theta)^2 \cos^2(2\phi) + 4 \cos^2 \theta \sin^2(2\phi) \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\langle F_\times^2 \rangle |_\psi \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_\times^2 d\psi = \langle F_+^2 \rangle |_\psi \quad (46)$$

よって、各偏極に対して平均化したアンテナパターンは同じとなる。

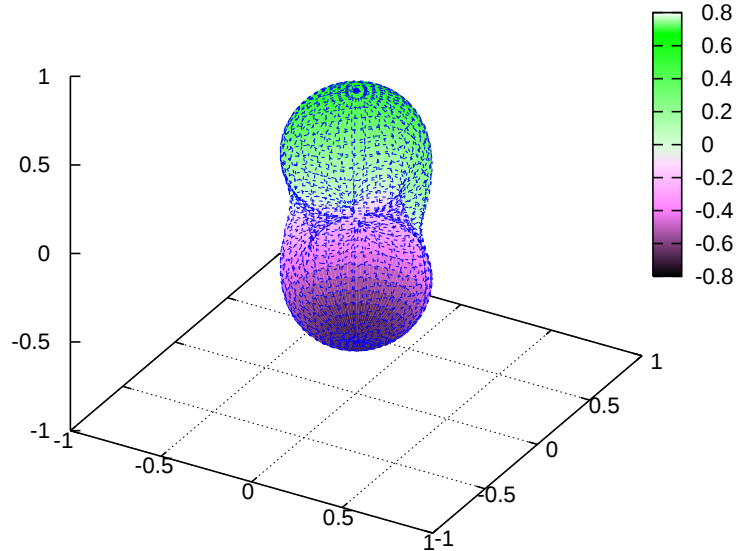


図 10: 偏極方向 ψ について平均化したアンテナパターン $\sqrt{\langle F_+^2 \rangle |_\psi}$

さらに、天頂角 θ 方向にも平均化すると

$$\begin{aligned}
 \langle F^2 \rangle|_{\psi, \theta} &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi \sin \theta d\theta F_+^2 \\
 &= \frac{1}{6} \sin^2(2\phi) + \frac{7}{30} \cos^2(2\phi) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \cos^2(2\phi) \\
 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{30} \cos(4\phi)
 \end{aligned} \tag{47}$$

偏極 ψ と方位角 ϕ 方向に平均化すると

$$\begin{aligned}
 \langle F^2 \rangle|_{\psi, \phi} &\equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\psi \int_0^{2\pi} d\phi F_+^2 \\
 &= \frac{\cos^4 \theta + 6 \cos^2 \theta + 1}{16} \\
 &= \frac{\cos(4\theta) + 28 \cos(2\theta) + 35}{128}
 \end{aligned} \tag{48}$$

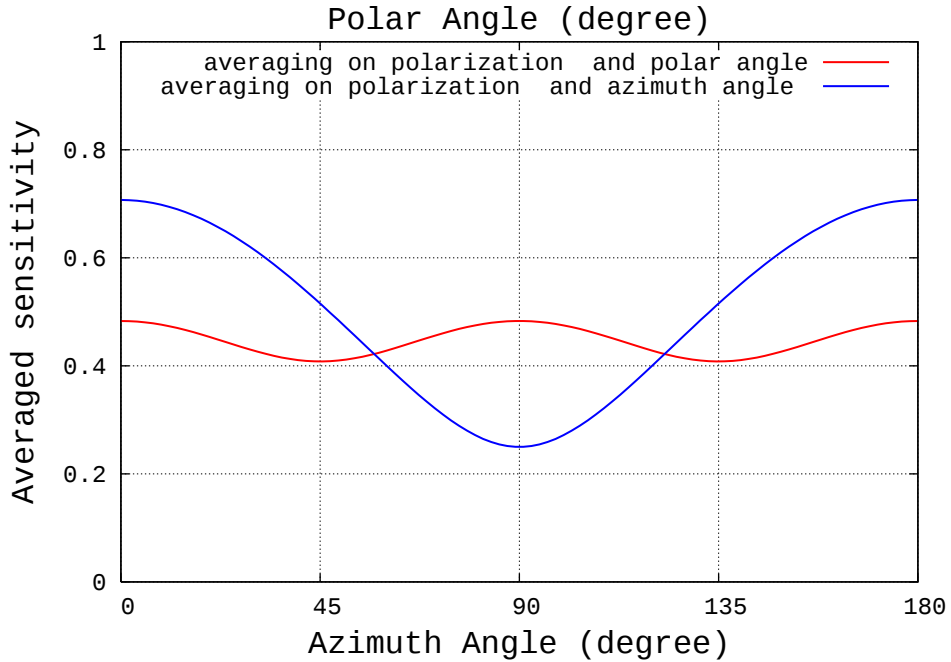


図 11: 偏極方向 ψ と天頂角 θ について平均化したアンテナパターン $\sqrt{\langle F_+^2 \rangle|_{\psi, \theta}}$ と偏極方向 ψ と方位角 ϕ について平均化したアンテナパターン $\sqrt{\langle F_+^2 \rangle|_{\psi, \phi}}$

最後に、方位角 ϕ についても平均化すると、

$$\begin{aligned}
\langle F^2 \rangle |_{\psi, \theta, \phi} &\equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi F_+^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \cos^2(2\phi) \right\} d\phi \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{5+1}{30} = \frac{1}{5}
\end{aligned} \tag{49}$$

よって、

『アンテナパターンの RMS (root mean square) 感度は $1/\sqrt{5} = 0.44721 \dots$ 』

となる。

ただし、中性子連星に対する平均感度はこれとは異なる。理由は、連星合体における重力波放射に指向性があるためである。上記平均値は重力波の2つの偏極が同じ強度で到来したと仮定した場合の値であるので注意が必要である。

C.2 重力波放射パターンも考慮した場合の RMS 値

中性子連星の重力波放射パターンは式 (13), (14) に示したように

$$\begin{aligned}
H_+(\iota) &= \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \\
H_\times(\iota) &= \cos \iota
\end{aligned}$$

また Matched Filter 解析における SNR は式 (18) で書き表すことができるので

$$(SNR)^2 \propto (H_+ F_+)^2 + (H_\times F_\times)^2 \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
\langle H_+^2 \rangle |_\iota &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right)^2 \sin \iota d\iota \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \iota)^2 \sin \iota d\iota = \frac{1}{8} \times \frac{56}{15} = \frac{7}{15}
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\langle H_\times^2 \rangle |_\iota &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\pi (\cos^2 \iota)^2 \sin \iota d\iota \\
&= \frac{1}{2} \times \int_0^\pi (\cos^2 \iota)^2 \sin \iota d\iota = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\therefore \langle (H_+ F_+)^2 + (H_\times F_\times)^2 \rangle = \frac{1}{5} \times \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{25} \tag{53}$$

『中性子連星に対する RMS (root mean square) 感度は $2/5 = 0.4$ 』

となる。因みに、放射エネルギーの平均は

$$\langle H_+^2 + H_\times^2 \rangle = \frac{7}{15} + \frac{1}{3} = \frac{4}{5} \tag{54}$$

となる。

D 感度の RMS 値と実効検出距離

付録 C で述べたように、感度の 2 乗平均平方根 (RMS) はコンパクト連星に対して 0.4 である。一方、付録 A で述べた実効検出距離と最大検出距離の比は $0.441525 \dots$ であり両者は明らかに違う。この違いが何処から来るのか理解するために、付録 A で求めた実効検出距離を別のアプローチで計算してみよう。

検出器アンテナパターンと連星の重力波放射パターンを考慮した感度の補正係数を Θ とし、以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\Theta^2 &\equiv 4 [F_+^2 (1 + \cos^2 \iota) + 4 F_\times^2 \cos^2 \iota] \\ &= 16 [H_+^2 F_+^2 + H_\times^2 F_\times^2]\end{aligned}\quad (55)$$

この時、信号雑音比 SNR は付録 B で定義した $R_{\max}$ を用いて以下のように書き表すことが出来る。

$$SNR = 10 \times \frac{R_{\max}}{r} \times \frac{\Theta}{4} = \frac{5 R_{\max} \Theta_{\text{th}}}{2 r} \quad (56)$$

ここで r は地球から連星までの距離である。よって

$$SNR_{\text{th}} = \frac{5 R_{\max} \Theta_{\text{th}}}{2 r} = 10 \quad (57)$$

$$\Theta_{\text{th}} = 10 \times \frac{2 r}{5 R_{\max}} = \frac{4}{R_{\max}} r \quad (58)$$

つまり $\Theta \geq \Theta_{\text{th}}$ ならば、 $SNR \geq 10$ を満たすことが出来る。尚 Θ_{th} は距離 r の関数で、近い連星ほど振幅の減衰が小さいので、その分 Θ が小さくても $SNR \geq 10$ を満たすことが出来ることを示している。

以上より、 Θ の確率分布関数 $P(\Theta)$ が分かれば、ある距離 r 離れた中性子連星からの重力波を $SNR \geq 10$ で捉える確率 $Q(r)$ を、下記のように書くことが出来る。

$$Q(r) = \int_{\Theta_{\text{th}}(r)}^4 P(\Theta) d\Theta \quad (59)$$

$P(\Theta)$ を解析的に解くことが出来れば幸せなのであるが $\dots$ ここでは近似式を導入する。

$$P(\Theta) = \frac{5}{256} \Theta (4 - \Theta)^3 \quad (60)$$

図 12 は近似式と Monte Carlo simulation により推定された分布関数を比較したグラフである。この差の分、この節の近似計算は正しくないことを再度強調して置く。

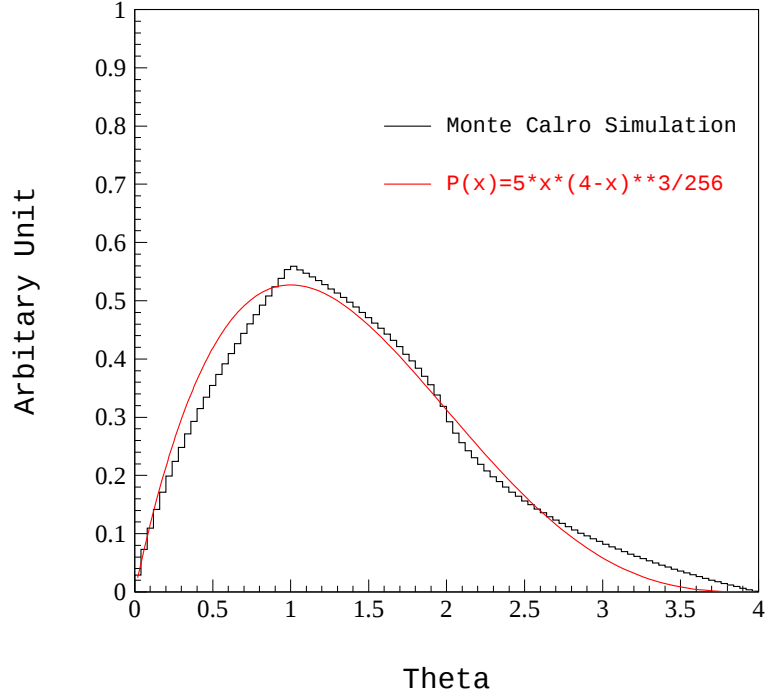


図 12: Θ の確率分布関数：近似式と Monte Carlo simulation による確率分布関数の推定結果

$$\begin{aligned}
 Q(r) &= \int_{\Theta_{\text{th}}(r)}^4 P(\Theta) d\Theta \\
 &= \frac{\Theta_{\text{th}}^5 - 15\Theta_{\text{th}}^4 + 80\Theta_{\text{th}}^3 - 160\Theta_{\text{th}}^2 + 256}{256}
 \end{aligned} \tag{61}$$

最後に付録 A と同様に $SNR \geq 10$ となる重力波イベント数 N_{obs} を求めることにする。

$$N_{\text{obs}} = T_{\text{obs}} \times \int_0^\infty 4\pi r^2 \mathcal{P}(r) Q(r) dr \tag{62}$$

ここで $\mathcal{P}(r)$ は中性子連星の合体頻度であるが、今は全天一様であると仮定し積分の外に出すことにする。

$$= 4\pi \mathcal{P} T_{\text{obs}} \times \int_0^\infty r^2 Q(r) dr$$

また r の積分範囲については、 $r > r_{\text{max}}$ の時、 Θ を最大値の 4 としても $SNR < 10$ であるので

$$= 4\pi \mathcal{P} T_{\text{obs}} \times \int_0^{r_{\text{max}}} r^2 Q(r) dr$$

式 (61) より、

$$N_{\text{obs}} = 4 \pi \mathcal{P} T_{\text{obs}} \times \frac{r_{\text{max}}^3}{42} \quad (63)$$

最適条件の場合、 $Q(r) = 1$ なので

$$(N_{\text{obs}})^{\text{opt.}} = 4 \pi \mathcal{P} T_{\text{obs}} \times \frac{r_{\text{max}}^3}{3} \quad (64)$$

よって実効検出距離 r_{eff} は

$$\begin{aligned} \frac{r_{\text{eff}}^3}{3} &= \frac{r_{\text{max}}^3}{42} \\ \frac{r_{\text{eff}}}{r_{\text{max}}} &= \left(\frac{1}{14} \right)^{1/3} = 0.41491 \dots \end{aligned} \quad (65)$$

このように実効検出距離を計算するには、距離 r 毎に Θ に対する閾値を変えなければならないし、 $4 \pi r^2 dr$ により重力波源の合体頻度に重み付けをしなければならないことが分かる。よって単なる感度の RMS 値を最大検出距離 r_{max} に掛けるようなことはしてはならない。