

# LCGT制御法 検討レポート

ver. 2.3

宗宮健太郎

平成17年3月3日

# 目次

第1章	はじめに	3
第2章	RSE制御の基本とLIGO法	5
2.1	二重変調と二重復調	5
2.2	変調周波数の選び方	7
2.2.1	Michelson 干渉計の asymmetry	7
2.2.2	Power-recycled Fabry-Perot Michelson 干渉計	8
2.2.3	Power-recycled RSE 干渉計	9
2.3	AdLIGO の制御法	9
第3章	信号取得効率と低周波法	12
3.1	15-50MHz 法	12
3.2	Asymmetry の最適化	12
3.3	低周波法	15
第4章	対角化へ向けて	17
4.1	対角化を目指す理由	17
4.2	マクロずらし	17
4.3	対角化の条件	18
4.4	対角化法	20
4.5	合併法	21
第5章	4つの制御法の分類と比較	23
5.1	ここまでのまとめ	23
5.2	Asymmetry 長	23
5.2.1	周波数雑音	24
5.2.2	Mode-mismatching による腕内 power の減少	25
5.2.3	Mode-mismatching による TEM00 の phase shift	25
5.3	直接対角化の必要性	26
5.4	その他の違い	26
5.4.1	Detuned-RSE への拡張性	27
5.4.2	Lock acquisition	27
5.4.3	周波数について	28
第6章	考察いろいろ	29
第7章	結論	30

付録 A 対角化の解析計算	31
付録 B Mode-mismatching による変調雑音	32

# はじめに

2005年現在、日本では TAMA<sup>[1]</sup> に次ぐ次世代重力波検出器として低温大型干渉計 LCGT<sup>[2]</sup> の計画が本格化している。LCGT は神岡の地下に設置することにより地面振動雑音を減らし、cryogenic 技術により主鏡を低温にして熱雑音を減らしており、広い帯域で感度は量子雑音<sup>[3]</sup> により制限される見込みである。そのため、従来の power-recycled Fabry-Perot Michelson 型干渉計にさらに鏡を加えた power-recycled RSE 干渉計<sup>[4]</sup> を用いて量子雑音の低減をする必要がある。本文書は RSE の制御法について知見をまとめたもので、LCGT の干渉計設計に役立てば幸いである。

LCGT と並ぶ次世代検出器としてアメリカの Advanced LIGO<sup>[5]</sup> があり、こちらも RSE 技術を採用する。AdLIGO は detuning<sup>[6]</sup> と DC readout<sup>[7]</sup> というさらなる先進技術を導入する予定である。Detuning というのは感度を狭帯域化する一方で、最高感度が標準量子限界を超えることが理論的に判明しており、より遠くの中性子連星からの重力波をとらえることができる。しかし、重力波信号を unbalanced sideband で取得せねばならなくなり、変調系の位相雑音が感度を制限してしまうという危惧がある。AdLIGO は detuning と同時に DC readout を導入するのでこの問題は回避できる。DC readout というのは、従来の変調復調を用いた重力波信号取得ではなく、carrier 周波数の光を local oscillator にして homodyne detection をするというもので、変調系の雑音は混入しないからである。

ではなぜ LCGT はそのような先進技術を取り入れないかということ、私見だが次の2つの理由があると考えられる。まず、感度を制限する低周波の量子雑音である輻射圧雑音はまだ実験的に確認されておらず、ゆえに標準量子限界も理論的にしか定まっていないものであって、その確認を先にすべきだからである。Detuning を組み込むと、低周波は optical spring による rigidity<sup>[8]</sup> が表れてしまうため、輻射圧雑音は見えない。量子計測の直接確認には broadband な干渉計が必要で、標準量子限界を超える感度を出すのは、それからすべきだと考える。そして、detuning と DC readout をすることによるいくつかのリスクの回避がもうひとつの理由である。Optical spring による不安定性を除去するためのサーボ系の設計<sup>[6]</sup> や、DC で存在する音響雑音の軽減など、実際に感度を出すに当たってのリスクが増大する。AdLIGO より 1 ~ 2 年遅れて開始するであろう LCGT が AdLIGO より先に高い感度を実現して重力波をとらえたとしたら、ここでリスクを減らしておくのも戦略なのだろう。世界的に見ても、同じリスクを犯す干渉計が複数台あるより、リスクを分散させた方がいいと考えられる。ちなみに、超新星爆発からの重力波など高周波の信号をとらえるのが broadband の利点だという意見もあるが、multiple pendulum の中段マスを制御する suspension-point interferometer(SPI)<sup>[9]</sup> が高周波で主干渉計以上の感度を示すことが可能だと考えられるので、それはここでは理由に含まない。

将来的に LCGT の感度が低周波で輻射圧雑音で制限されるようになり、AdLIGO が detuning や DC readout によるさまざまな問題を解決して高感度化に成功したならば、

LCGT もそれらの技術を取り入れるべきであろう。中性子連星からの重力波を対象にした event rate で 3 倍以上の違いが期待されるからである <sup>[10]</sup>。

本文書では broadband RSE としての LCGT の制御法について考える。RSE の制御法は Caltech の J.Mason が考案したもの <sup>[11]</sup> が AdLIGO で適用されることになっているが、detuning や DC readout を用いることが前提となっているので、そのままでは LCGT で使うことができない。歴史的には J.Mason 法をアレンジしたものがまず提案され、その後それよりも信号取得効率のよいものが、そしてまた別に信号分離度のよい制御法も提案されてきた。これらには各々細かな違いがあり、どの方法を採用すべきか決まっていない。本文書には筆者による私見も含まれているが、それらはあくまで参考としてとらえていただきたい。

以下、まず RSE 制御の基本として AdLIGO で採用される制御法を説明する。その後、RSE の制御信号取得効率について説明し、AdLIGO と同じ効率を持ちつつ LCGT に組み込み可能なものとして開発された制御法を説明する。続いて制御信号の分離度について議論を加え、対角化可能な方法として 2 つの制御法について説明する。以上の 4 つの制御法はみな同じ条件を満たしているので、その満たし方の違いに基づいてうまく分類できる。そして最後に各々の特徴について議論をしていく。

# RSE制御の基本とLIGO法

Section 2.1

## 二重変調と二重複調

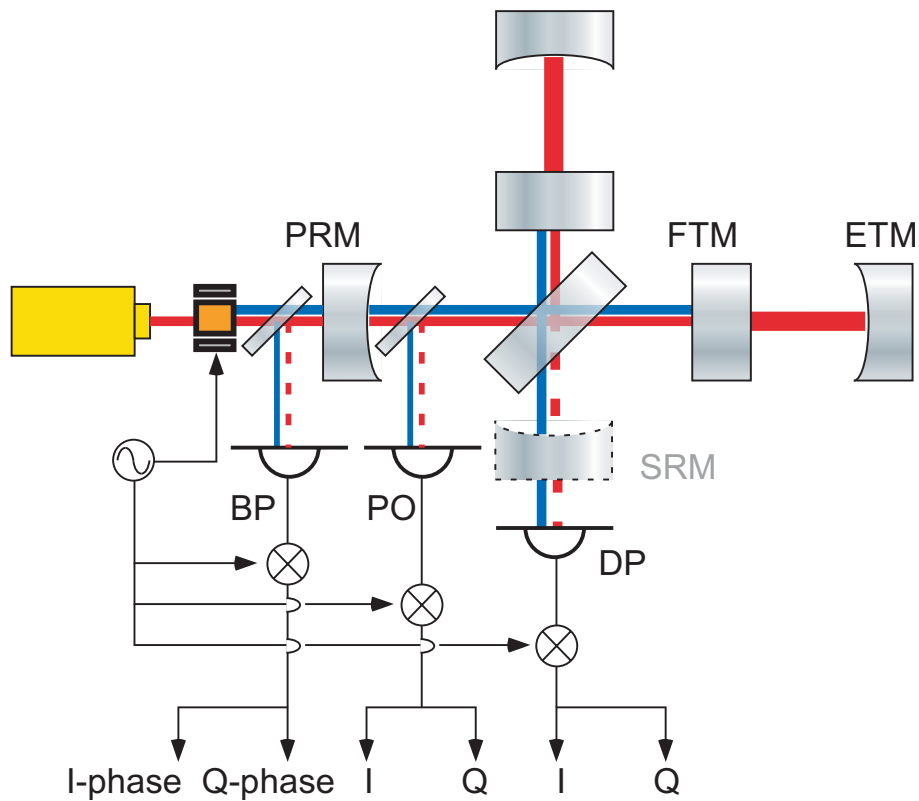


図 2.1: PRFPMI に SRM を加えて RSE 干渉計となる。

RSE 干渉計は、TAMA や LIGO のような power-recycled Fabry-Perot Michelson 干渉計の dark port に signal recycling mirror(SRM<sup>1</sup>) を加えた構造となっている。PRFPMI には制御すべき自由度が4つある：腕共振器の同相長 ( $L_+$ ) と差動長 ( $L_-$ ) を制御して両腕の共振状態を保ち、power-recycling cavity の平均長 ( $l_+$ ) を制御して反共振状態を保ち、power-recycling cavity の差動長 ( $l_-$ ) を制御して信号取得側が dark port になるようにし

<sup>1</sup>Signal extraction mirror(SEM) と呼ぶこともある。どちらでもよい。

ている。同相信号が2種類と差動信号が2種類である。LASER 光を位相変調器に通し、carrier 光と RF sideband という2つの電場を用意して、その beat から制御信号を得る。信号を取得する場所は図 2.1 に示すように、bright port(BP)、pick-off port(PO)、そして dark port(DP) の3つで、復調位相によって同相信号を取る I-phase と差動信号を取る Q-phase の2つの信号を各々から取ることができる。DP には同相信号が現れないが、BP と PO の2箇所から独立に信号を取得できるので十分である。

ところが、RSE では signal-recycling cavity の平均長 ( $\ell_s$ ) を加えて同相信号が3種類となり、上記の方法で信号を取得することができない。そこで変調器をもう1つ用意して2種類の sideband から制御信号を得る必要が出てくる。ここで  $L_+$  と  $L_-$  は carrier とどちらかの sideband との beat から取得する一方で、small 系の信号は sideband 同士の beat から信号を取れば、sideband は腕共振器で非共振なので、 $L_{\pm}$  とは分離して信号を取得できる。

また、sideband 同士の beat を取るということは、2回復調するということであり、復調位相の自由度が増加する。この二重復調のことを double demodulation(DDM) と呼ぶ。AdLIGO のような detuning された干渉計では制御信号に offset が乗ることが知られている<sup>[14]</sup>が、double demodulation の2つの自由度により、offset を除去しつつ信号をなるべく大きく取ることが可能となる。Broadband RSE では offset は出ないので、信号を最大化したり、信号分離度を上げたりするのにこの自由度を使える。

ちなみに、日本の RSE 実験はこれまで全て1変調3倍波復調で制御している<sup>[12][13][14]</sup>が、3倍波復調というのも基本波と2倍高調波の beat で信号を取得しているので2変調と基本的には同じである。ただ、2つの sideband の周波数がちょうど2倍という制限があるため、power-recycled RSE の制御には向いていないことが分かっている<sup>2</sup>。

さて、detuning した場合は upper sideband と lower sideband の間に unbalance が生じ、single sideband のような状態になるので、両方とも位相変調でも信号が取れるが、broadband RSE において sideband 同士の beat から信号を取るためには、一方を位相変調にしても一方を振幅変調にしなければならない。振幅変調の代わりに single sideband を用いることも可能だが、そうするとせっかく detuning によるリスクを回避したのに、変調雑音の混入など同様の問題をかかえることになり無意味である<sup>3</sup>。ただし、振幅変調を用いる場合、その sideband と carrier との beat からは制御信号が取れないので気をつけなければならない。

また、sideband の sideband、つまり subsideband にも気をつけなければならない。Double demodulation というのは和周波単復調と差周波単復調の和と等価である ( $\cos \omega_1 t \times \cos \omega_2 t = [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]/2$  という事) から、和周波や差周波の周波数に subsideband が存在すると carrier との beat が取れてしまい  $L_{\pm}$  信号が small 系信号を乱してしまうのである。この問題は detuned RSE でも少なからず起きていたようで<sup>[16]</sup>、Caltech 40m では Mazh-Zehnder 干渉計の両腕に変調器を入れて subsideband を作らないようにすることになった(図 2.2)。ただ、この方法だと Mach-Zehnder の腕の差動揺らぎが周波数雑音を大きくするという問題が深刻で<sup>[17]</sup>、Virtual Mach-Zehnder<sup>[18]</sup>を用いるな

<sup>2</sup>偏光 RSE は PRM と SRM が縮退している構造なので問題ない<sup>[13]</sup>。偏光素子に実用的な問題がなければ LCGT にも使えるのではないかと思う。

<sup>3</sup>Single sideband を利用する場合、複数の復調位相で  $L_-$  を取得して和を取ることで感度が上がるという計算結果も出ている<sup>[15]</sup>が、ここでは省略する。

どの改良が必要であろう。以下の計算では subsideband は生じていないものとする。元々今回 simulation に用いた FINESSE <sup>[19]</sup> という software では subsideband が生じないようにしているので注意が必要である。

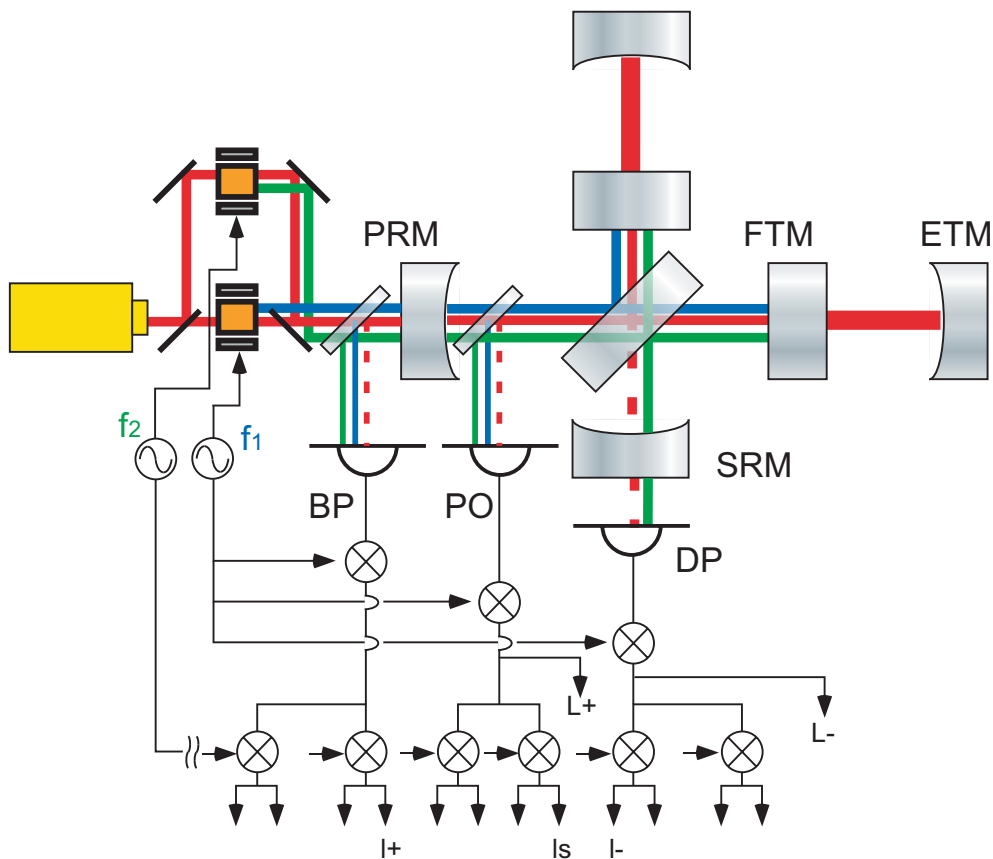


図 2.2: RSE の制御。2 つの変調を Mach-Zehnder 干渉計で足し合わせ、各 port で double demodulation して small 系信号を取得する。

---

## Section 2.2

---

### 変調周波数の選び方

---

#### 2.2.1 Michelson 干渉計の asymmetry

変調周波数は周波数雑音や photodetector の量子効率との兼ね合いで 10MHz くらいから 200MHz くらいまでで選ぶことになっている。その範囲内で具体的に変調周波数を決め際には中央部分の Michelson 干渉計における asymmetry 長が関わってくる。この部分



を1枚の鏡とみなす場合、その透過率と反射率は以下のようにして求まる。

$$\frac{1}{2}E_0e^{-i(\Omega\pm\omega_m)(t+\Delta\ell/c)} + \frac{1}{2}E_0e^{-i(\Omega\pm\omega_m)(t-\Delta\ell/c)} = E_0e^{-i(\Omega\pm\omega_m)t} \cdot \cos\alpha, \quad (2.1)$$

$$\therefore r_{\text{MI}} = \cos\alpha,$$

$$\frac{1}{2}E_0e^{-i(\Omega\pm\omega_m)(t+\Delta\ell/c)} - \frac{1}{2}E_0e^{-i(\Omega\pm\omega_m)(t-\Delta\ell/c)} = E_0e^{-i(\Omega\pm\omega_m)t} \cdot i\sin\alpha, \quad (2.2)$$

$$\therefore t_{\text{MI}} = i\sin\alpha.$$

ここで $\alpha$ は asymmetry factor と呼ばれる変調周波数の関数で、asymmetry 長を $\Delta\ell$ として

$$\alpha = \frac{\Delta\ell\omega_m}{c} \quad (2.3)$$

である。単純な Michelson 干渉計ならば、dark fringe にして carrier がもれてこない dark port にも sideband は $\sin\alpha$  だけもれてくることになり、 $\ell_-$  や  $L_-$  信号が取得できる要因となるのである。

## 2.2.2 Power-recycled Fabry-Perot Michelson 干渉計

LIGO では、sideband が power-recycling cavity でやや under coupling に近い critical coupling になるように asymmetry が設定されている。Fabry-Perot 共振器において入射側の鏡と比べて出射側の鏡の反射率が高い共振状態を over coupling、その逆を under coupling といい、2つの鏡の反射率が等しい場合は critical coupling と呼ぶ。いま、PRM と FPMI 複合鏡からなる共振器を考えたとき、carrier 光にとっては $r_{\text{FPMI}} = 0.993$ であり、PRM の振幅反射率は $r_p = 0.988$ だから、carrier は power-recycling cavity で over coupling になっている。一方、sideband にとっては $r_{\text{FPMI}} \simeq \cos\alpha$ ということになり、LIGO ではこれが0.983となる<sup>[20]</sup>から、やや under coupling で、ほぼ critical coupling ということになる。すると、BP では sideband の DC 成分、つまり信号を持たない電場成分がほとんどないから、carrier と sideband の beat からは sideband の AC 成分が支配的に検出される。Sideband は腕で共振していないので $L_+$ を運ばず $\ell_+$ を運ぶので、なるべく分離することができるのである。一方、power-recycling cavity 内には sideband の DC 成分があるので、元々 $\ell_+$ より大きい $L_+$ は PO から支配的に取ることができる。

腕共振器に角度ずれなどの影響が出ると carrier にとっての $r_{\text{FPMI}}$ が下がる。これが sideband にとっての $r_{\text{FPMI}}$ くらいまで下がってしまうと $\ell_+$ 信号が相殺してしまう<sup>[21]</sup>。なぜ critical coupling から少しずらしてあるのかはここではふれないが、under coupling 側にずらしてあるのは、このような相殺がなるべくおきないようにするためだと思われる。

TAMA では3倍波復調法で $\ell_+$ 信号を取得しているので、LIGOのように腕の状況に左右されることはなく、lock acquisition も simple である<sup>[21]</sup>。ただし、3倍高調波と carrier の beat が混入する分、 $L_+$ も多少は混入することになる。この高調波を消去する方法はいくつかあるが、実際は多少の混入があっても lock acquisition はうまくいくようである。

RSE の制御においては、sideband 同士の beat で small 系信号を取得するという点で TAMA の方法に近い一方で、power-recycling cavity と signal-recycling cavity の信号分離には LIGO の分離法が使われているとも言える。次節でそれを見ていこう。

### 2.2.3 Power-recycled RSE 干渉計

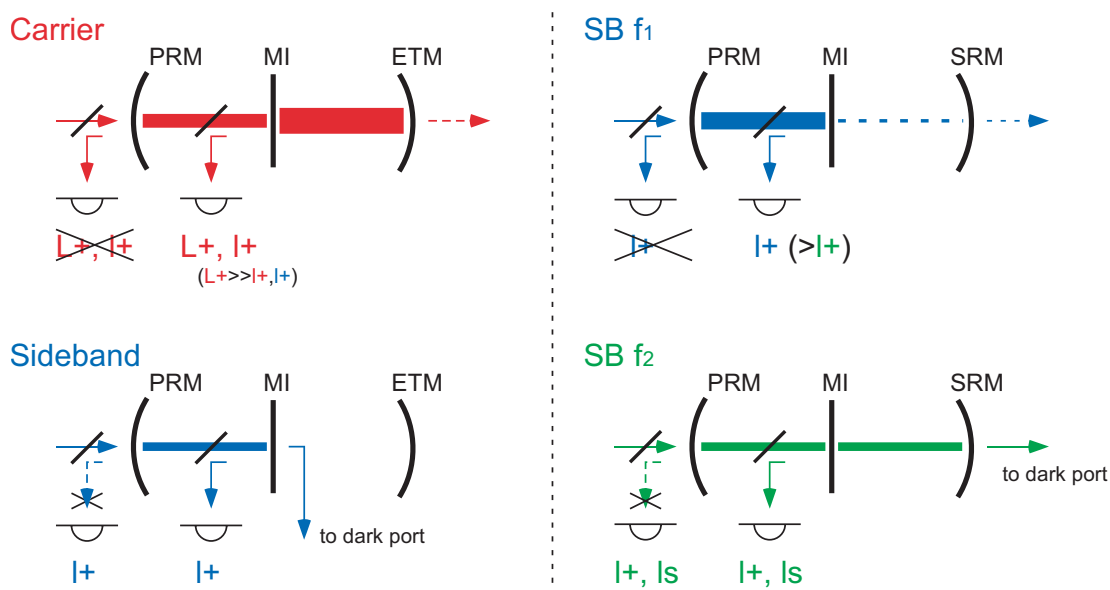


図 2.3: (左図)PRFPMI では sideband にとって PRM と Michelson 干渉計で構成する共振器がほぼ critical coupling 状態になり BP に光が戻らないため、carrier が運ぶ  $L_+$  があまり現れない。それと同様に (右図)RSE では  $f_2$  の sideband にとって PRM と SRM で構成する共振器が critical coupling 状態になり、BP では  $f_1$  が運ぶ  $l_+$  が現れず、PO では現れるため、 $f_2$  のみが運ぶ  $l_s$  に対する混入比が異なり、独立した信号が取れるのである。

前節では PRFPMI において carrier と sideband を用いて  $L_+$  と  $l_+$  を分離することを考えた。二重変調をふまれば RSE において 2 つの sideband を用いて  $l_+$  と  $l_s$  を分離することはこれと同じである (図 2.3)。周波数  $f_1$  の振幅変調と周波数  $f_2$  の位相変調を考える。いま、 $f_1$  を power-recycling cavity のみで共振させ、 $f_2$  を signal-recycling cavity と power-recycling cavity の複合共振器で critical coupling に近い状態で共振させると、BP には  $f_2$  の DC 成分があまり現れないことになる。すると、BP では  $f_2$  の AC 成分が持つ  $l_+$  と  $l_s$  が検出され、PO ではそれに加えて  $f_1$  の AC 成分が持つ  $l_+$  が検出される。2 つの sideband にとっての power-recycling gain が等しくなるように asymmetry を設定すれば、PO で  $l_s$  だけ分離して取得できるし、そこまでなくても BP と PO で  $l_+$  と  $l_s$  の混合比が異なるので独立な信号を得ることが可能である。

---

## Section 2.3

---

### AdLIGO の制御法

---

具体的に周波数を与えて計算してみよう。まず AdLIGO で用いられている手法をそのまま LCGT にあてはめて考える。Detuning の有無はここではほとんど関係ない。

LIGO 法では  $f_1$  を 9MHz に、 $f_2$  を 180MHz に設定し、asymmetry 長を約 42cm にす

る。ここで、 $f_1$  は PRFPMI で用いた sideband の周波数に近く、DP に少しだけもれるという点と power-recycling cavity で共振するという点も同じである。一方、 $f_2$  にとっては asymmetry factor が

$$\alpha = \frac{\Delta\omega_2}{c} = \frac{0.42 \times 2\pi \times 180\text{MHz}}{3 \times 10^8} \simeq \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

になるようにして Michelson 干渉計部分を素通りさせ、PRM と SRM で構成する共振器で共振させ、 $\ell_s$  を運ばせる。このとき  $f_2$  にとって  $t_{\text{MI}}^2 = -1$  だから、どちらかの recycling cavity を共振、もう一方を反共振にする。9MHz と 180MHz は偶数倍の関係になっており、9MHz が power-recycling cavity で共振であるとき 180MHz は必然的に反共振であるから、180MHz は signal-recycling cavity では共振でなければならない。Caltech 40m では  $f_1$  と  $f_2$  が奇数倍の関係なので、逆に  $f_2$  が signal-recycling cavity で共振となるよう設計されている。これら偶数倍と奇数倍の手法の間には大きな違いはないようである。共振器の縦モード間隔を周波数で表したものを free spectral range(FSR) と呼ぶ。LIGO 法では power-recycling cavity の FSR は 18MHz であり、その長さは

$$\ell_{\text{PR}} = \frac{c}{2 \times 18\text{MHz}} = 8.32756828\text{m} \quad (2.5)$$

となる。ここで  $c = 299792458\text{m/s}$  のように高い精度で計算しないと FINESSE の計算結果がずれてしまうので注意が必要である。また、signal-recycling cavity の FSR は 180/11MHz であり、その長さは

$$\ell_{\text{SR}} = \frac{c}{2 \times 180/11\text{MHz}} = 9.16032511\text{m} \quad (2.6)$$

となる。ここで FSR を 18MHz でなく 180/11MHz にしているのは、少しだけ Michelson 干渉計部分を透過してくる  $f_1$  が共振しないようにするためである。Asymmetry factor を  $\pi/2$  にするための asymmetry 長も正確に求めると、0.41637841m となる。LCGT の design では PRM と SRM の反射率が少し異なるので、厳密に critical coupling となるためには asymmetry 長はもう少し短くなる。詳しい説明は次章で行なうが、PRM の反射率を 76%、SRM の反射率を 68% として、critical coupling のための asymmetry 長は 0.37169886m となる。

	Port	Demod.	$L_+$	$L_-$	$\ell_+$	$\ell_-$	$\ell_s$	norm.
$L_+$	PO	$f_2$	<b>1</b>	0.000	-0.001	0.000	-0.001	7780
$L_-$	DP	$f_2$	0.000	<b>1</b>	-0.000	0.001	-0.000	272
$\ell_+$	BP	DDM	-0.002	-0.000	<b>1</b>	0.008	-0.362	0.105
$\ell_-$	DP	DDM	-0.000	0.001	-0.003	<b>1</b>	-0.006	0.019
$\ell_s$	PO	DDM	-0.000	0.000	1.141	0.018	<b>1</b>	0.296

表 2.1: LIGO 法を用いた場合の LCGT の信号取得マトリクス。

以上をふまえて FINESSE で計算した信号取得マトリクスは表 2.1 のようになる。Norm. というのは規格化定数で、各信号の大きさを表すが、取得 port が異なるのでこのマトリ

クス内では意味を持たず、他の手法との比較に用いる。入射光 power は 100W に、変調指数は 0.1 に設定してあるが、これらが意味を持つのは後で行なう shot noise の計算においてのみである。LIGO 法のマトリクスでは  $l_s$  取得 port で  $l_+$  が大きく現れているように見えるが BP と PO の信号を合わせて考えれば独立した信号取得が可能であることが分かる (表 2.2)。このように複数の port からの信号を組み合わせることは信号分離度をあげ、安定な制御につながり、small 系信号からの shot noise の回り込みについても改善する。しかし実際は対角化しなくても、そのいわゆる shot-noise-limited-feedback-noise が  $L_-$  に及ぼす影響という点では結局  $l_-$  が支配的なので問題はない (詳しくは第 5 章を参照のこと)。

	Port	Demod.	$L_+$	$L_-$	$l_+$	$l_-$	$l_s$	norm.
$L_+$	PO	$f_2$	<b>1</b>	0.000	-0.001	0.000	-0.001	7780
$L_-$	DP	$f_2$	0.000	<b>1</b>	-0.000	0.001	-0.000	272
$l_+$	BP+PO	DDM	-0.002	-0.000	<b>1</b>	0.010	0	0.150*
$l_-$	DP	DDM	-0.000	0.001	-0.003	<b>1</b>	-0.006	0.02
$l_s$	BP-PO	DDM	-0.001	0.000	0	0.006	<b>1</b>	0.125*

表 2.2: LIGO 法で BP と PO の信号を組み合わせると  $l_+$  と  $l_s$  を分離した場合のマトリクス。ここでの規格化定数 (\*) はあくまで目安。

この制御法の問題点は重力波信号を取得するのに用いる  $f_2$  の周波数が高いということである。実は詳しい調査はなされていないが、およそ 50 ~ 100MHz より高い周波数になると photodetector の量子効率が落ちて shot noise が増すとされている [22]。Small 系制御信号用なら多少 shot noise が増しても問題ないので 180MHz でも構わないが<sup>4</sup>、 $f_2$  に関しては 180MHz ではよろしくない。ちなみに AdLIGO では DC readout を用い、重力波を 180MHz で取得しないので問題ない。

<sup>4</sup>ただ、 $l_-$  の shot noise が  $L_-$  に回り込むことに関しては問題なので、結局用いる周波数は低い方がいいのかもしれない。これについては第 5 章でも触れることにする。

---

## 第3章

---

# 信号取得効率と低周波法

---

### Section 3.1

---

### 15-50MHz 法

---

前章で述べたように AdLIGO で用いられる 9-180MHz 法を LCGT で用いるには  $f_2$  の周波数が高すぎるという問題がある。そこでまず考案されたのが、基本的な概念は同じで  $f_2$  の周波数を低くした 15-50MHz 法である。新しく取り入れられた工夫は、2つの周波数を直接の倍数にするのではなく、公約数 (の2倍数) を power-recycling cavity の FSR にするという点である。この場合、FSR は 10MHz となる。もし 15-50MHz ではなく 10-50MHz のような組み合わせであったら、double demodulation における差周波である 40MHz が、 $f_1$  の4倍高調波と carrier の beat と重なってしまい、よろしくない。FSR を公約数にとるということは2つの周波数を近づける上で有用な工夫である。

しかし、15-50MHz 法は信号取得効率という点で損をしていることが分かる。LIGO 法の 9MHz の Michelson 干渉計透過率は強度で 0.6% とほぼ完全反射だったのだが、15-50MHz 法の透過率は 20.6% もあるため、 $f_2$  だけでなく  $f_1$  も  $l_s$  を運んでしまい、信号の相殺が起こってしまう (表 3.1)。

	$L_+$ (PO)	$L_-$ (DP)	$l_+$ (BP)	$l_-$ (DP)	$l_s$ (PO)
9-180MHz	7140	261	0.064	0.018	0.273
15-50MHz	7132	261	0.044	0.018	0.166

表 3.1: LIGO 法で  $f_1$  と  $f_2$  の周波数を近づけると  $l_s$  の信号量が落ちる。この表では PRM の反射率を 72% で計算してしまっているのに注意 (本来は 76%)。

この制御法だと DP での  $l_-$  と同相系信号の分離度が悪く、small 系からの shot noise の回り込みが懸念される。また、DP に2種類の sideband が存在するため、 $L_-$  の shot noise が増える、などの問題点もある。この方法はよい制御法とは言えないだろう。

## Section 3.2

# Asymmetry の最適化

LIGO 法では  $f_2$  にとっての  $\alpha$  が  $\pi/2$  であったため、周波数が高くなりがちであった。もっと小さな  $\alpha$  で  $l_s$  信号を効率よくとれないか考えてみよう。いま asymmetry が  $\alpha$  で与えられる sideband が各々の recycling cavity で共振であるとして、PRM、SRM、Michelson 干渉計で成り立つ複合共振器を 1 つの鏡と考えると、signal-recycling mirror の位相が  $\psi_s$  だけ動いたときの反射率は

$$r_{\text{PRSRC}}(\psi_s) \simeq -r_p + \frac{t_p^2 [(\cos \alpha - r_s)(1 + r_p r_s - (r_p + r_s) \cos \alpha) + i r_s \sin^2 \alpha \cdot \psi_s]}{[1 + r_p r_s - (r_p + r_s) \cos \alpha]^2} \quad (3.1)$$

で与えられる。反共振のときは  $r_p$  や  $r_s$  に負の符号をつければよい。非共振の場合についてはここでは考えない。式 (3.1) における  $\psi_s$  の係数が最大となるのは

$$\cos \alpha = \frac{r_p + r_s}{1 + r_p r_s} \quad (3.2)$$

のときということになる。

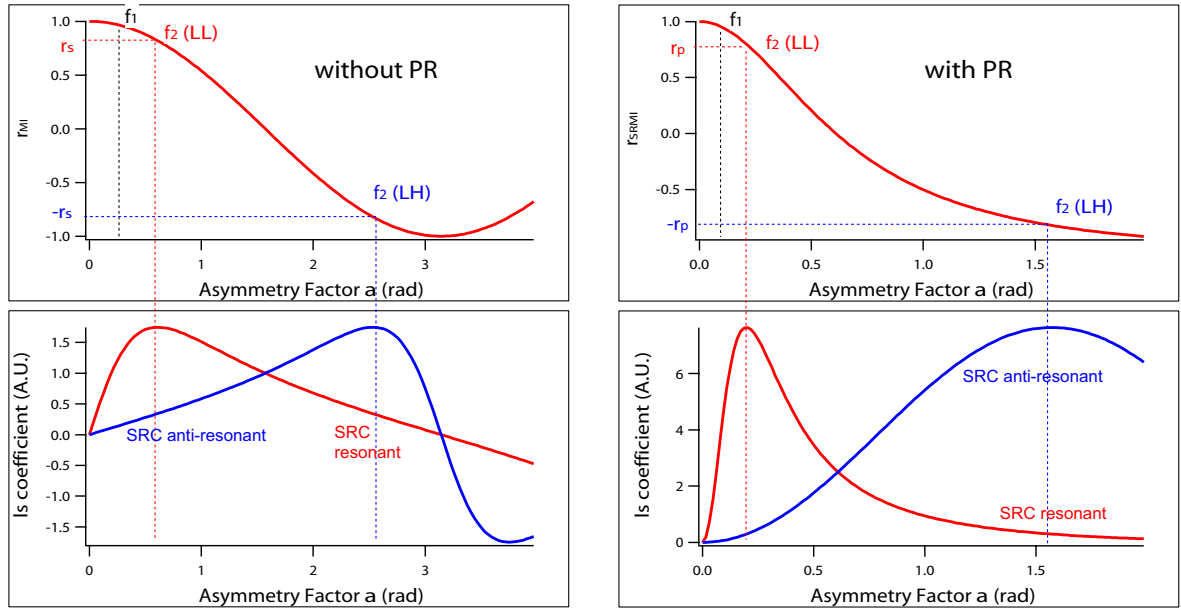


図 3.1: Asymmetry と  $l_s$  信号の関係。左図は PRM がない場合 (ここでは関係ない) で、右側がある場合。Recycling cavity が共に共振の場合と片方が反共振の場合とで最適点が異なるが、最適点における  $l_s$  信号量は等しい。

LIGO 法では  $f_2$  にとって power-recycling cavity が反共振で signal-recycling cavity が共振であるから、 $r_p \simeq r_s$  と考えれば  $\alpha = \pi/2$  はこの条件を満たしていたことが分かる。

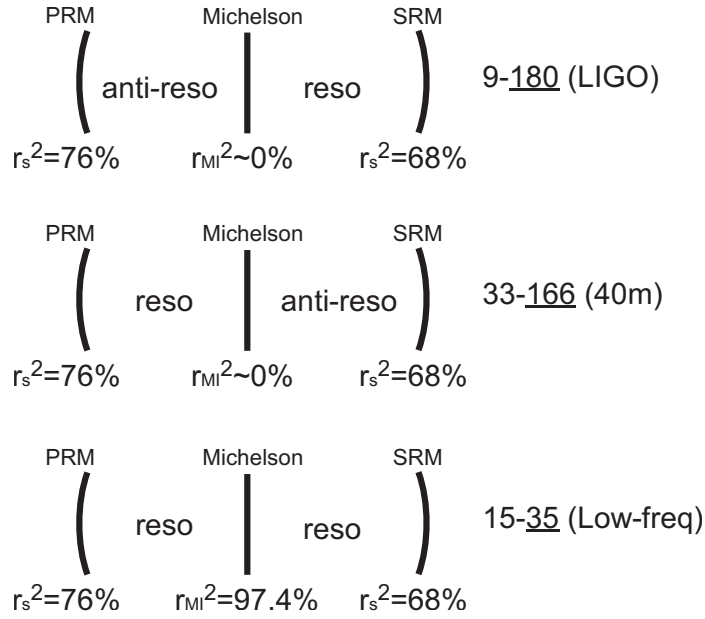


図 3.2: 各方法における  $f_2$  の共振状況。どの方法でも複合共振器は critical coupling となり  $\ell_s$  信号は最大化する。

より正確に最大化するならば、

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{0.76} - \sqrt{0.68}}{1 - \sqrt{0.76}\sqrt{0.68}} \quad (3.3)$$

から  $\Delta\ell = 0.37169886\text{m}$  となる。実際には pick-off mirror や beamsplitter の loss も計算に含まねばならないので注意が必要である。

さて、式 (3.2) にはもうひとつ解がある。Recycling cavity が共に共振の場合は、

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{0.76} + \sqrt{0.68}}{1 + \sqrt{0.76}\sqrt{0.68}} \quad (3.4)$$

から

$$\alpha = 0.16193201 \text{ rad} \quad (3.5)$$

が最適 asymmetry となる。

すなわち図 3.1 に示すように、recycling cavity の共振条件によって低周波と高周波に解が存在する。どちらの場合も最適点における  $\ell_s$  信号の大きさは同じである。また、最適点付近で少しずれても信号の大きさはあまり変わらない。

Fabry-Perot 共振器の finesse は end mirror の反射率が高いほど高く、front mirror の反射率が end mirror の反射率に近いほど高い。PRM、Michelson 干渉計、SRM で構成する複合共振器において、前者 2 つを複合鏡とみなすと、与えられた SRM の反射率と複合鏡の反射率が等しいときに finesse は最大となり、 $\ell_s$  信号が最大となる。Michelson 干渉計の反射率を SRM より低くして、power-recycling cavity を反共振にして複合鏡の反射率を上げることによってこの条件を満たすことができるし、逆に高くして共振にして複合鏡の反射率を

下げることができる。この複合共振器は PRM 側から見ても finesse は同じなので、SRM と Michelson 干渉計を複合鏡とみなして signal-recycling cavity を反共振にしてもよい (図 3.2)。

---

### Section 3.3

---

## 低周波法

---

低周波にある解を満たすことで LIGO 法の問題点である  $f_2$  の周波数の高さを解消することができる。この際、 $f_1$  に周波数が近いことから高調波と重なると困るのだが、15-50MHz 法のように直接倍数にしないことで回避することができる。参考文献<sup>[14]</sup>では  $f_1$  を 15MHz、 $f_2$  を 35MHz としている。式 (3.5) を満たす asymmetry 長は約 22cm となり、 $f_1$  にとっての Michelson 干渉計透過率は 0.5% となって、15-50MHz 法のような信号の相殺はなくなる (表 3.2 参照)。ここでは power-recycling cavity の FSR を 10MHz としている。

	$L_+$ (PO)	$L_-$ (DP)	$\ell_+$ (BP)	$\ell_-$ (DP)	$\ell_s$ (PO)
9-180MHz	7140	261	0.064	0.018	0.273
15-50MHz	7132	261	0.044	0.018	0.166
15-35MHz	8760	265	0.050	0.018	0.281

表 3.2: LIGO 法と低周波法の信号取得効率はほぼ同じである。この表では PRM の反射率を 72% で計算してしまっているので注意。

さて、LCGT では cryogenic 技術などからの要請で recycling cavity 長は 52m 以上が望ましいとされている。低周波法では  $f_1$  も  $f_2$  も共振でないといけないため、これらの周波数は奇数対奇数の関係でなければならないので、 $f_1$  を 12.6MHz、 $f_2$  を 35MHz としよう (9:25)。FSR を 2.8MHz にすることで power-recycling cavity 長は

$$\ell_{pr} = \frac{c}{2 \times 2.8\text{MHz}} = 53.53436750\text{m} \quad (3.6)$$

となり条件を満たす。Signal-recycling cavity については、これも設計上の要請で signal-recycling cavity と同じか 8m 大きいまでの範囲内になければならない。FSR を (35/13)MHz とすることで signal-recycling cavity 長は

$$\ell_{sr} = \frac{13c}{2 \times 35\text{MHz}} = 55.67574220\text{m} \quad (3.7)$$

となり条件を満たす。このとき  $f_1$  の周波数は、signal-recycling cavity における carrier の共振から 4 番目の縦モードである 10.8MHz から、5 番目の縦モードである 13.5MHz から十分離れており、SRM にはほぼ影響されない。また、式 (3.5) を満たす asymmetry 長は

$$\Delta\ell = \frac{0.16193201c}{2\pi \times 35\text{MHz}} = 0.22075243\text{m} \quad (3.8)$$



であり、以上の parameter を用いた場合の信号取得マトリクスは表 3.3 のようになる。LIGO 法と同様に、BP と PO の信号を組み合わせることで信号量をほぼ失わずに  $l_+$  と  $l_s$  を分離することも可能であるが、ここでは省略する。

	Port	Demod.	$L_+$	$L_-$	$l_+$	$l_-$	$l_s$	norm.
$L_+$	PO	$f_2$	<b>1</b>	0.000	-0.001	0.000	0.000	12418
$L_-$	DP	$f_2$	-0.000	<b>1</b>	-0.000	0.001	-0.000	288
$l_+$	BP	DDM	-0.000	0.000	<b>1</b>	0.010	0.709	0.060
$l_-$	DP	DDM	-0.000	0.001	0.000	<b>1</b>	-0.016	0.023
$l_s$	PO	DDM	0.002	-0.000	-1.221	-0.086	<b>1</b>	0.332

表 3.3: 12.6-35MHz 法を用いた場合の信号取得マトリクス。

ちなみに低周波法は天文台にある 4m prototype 干渉計の detuned RSE 実験で用いられている<sup>[14]</sup>。このときは power-recycling mirror はなかったが、Michelson 干渉計と SRM を critical coupling させることで  $l_s$  信号の取得効率を最適化させ、最終的に RSE の動作に成功している。

---

## 第4章

---

# 対角化へ向けて

---

### Section 4.1

---

## 対角化を目指す理由

---

図 2.2 を見ると分かるように、double demodulation をすることで small 系の信号 3 種類に対して信号取得 port が 12 個存在している。これだけあるなら digital な信号処理をせずとも光学的な工夫を施すことで small 系を直接対角化した優良な制御信号が取れるのではないかと、というところから対角化を目指す動きが出てきた<sup>[23][24][25]</sup>。対角化の merit としては、

- 制御が安定する
- 他信号からの回り込み shot noise がなくなる

ということが挙げられる。ただし、どちらの点に関しても digital な対角化でも信号取得効率に差がなければ同じであるし、後者に関してはもっとも問題である  $L_-$  への  $l_-$  の回り込みがどのみち避けられないので得がない。最終的には lock acquisition の観点から対角化が必要であることが判明し、さらに digital な対角化より光学的対角化の方が簡単であることが示されれば、対角化する意味が出てくることになる。

これは私見だが、実は対角化を目指す動きの中で生まれたもっとも有用な点は、対角化することではなく、第 4.3 節で説明する  $f_1$  の選び方の方なのではないかとすら思う。対角化が必要かどうかは第 5 章で議論するとして、LIGO 法および低周波法に本章で紹介する 2 つの制御法を加えて RSE 制御理論を完結させよう。

---

### Section 4.2

---

## マクロずらし

---

直接対角化を可能にするためには同じ信号取得 port でひとつの信号とそれ以外で最適復調位相が 90 度ずれているような関係が必要である。Double demodulation では  $f_1$  と  $f_2$  のそれぞれについて I-phase と Q-phase の自由度があり、原理的には最大 4 つの信号を完全分離して取ることができるはずである。図 4.1 左は、 $f_1$  と  $f_2$  の復調位相を両軸に取り small 系信号の等高線 (contour) を表したもので、ここでは LIGO 法における PO での contour を示してある。差動信号  $l_-$  が他の信号と最適位相が 90 度ずれている一方で、 $l_+$

と  $l_s$  という2つの同相信号はぴったり重なりあっているため、どの復調位相を選んでも  $l_+$  と  $l_s$  を分離することができない。

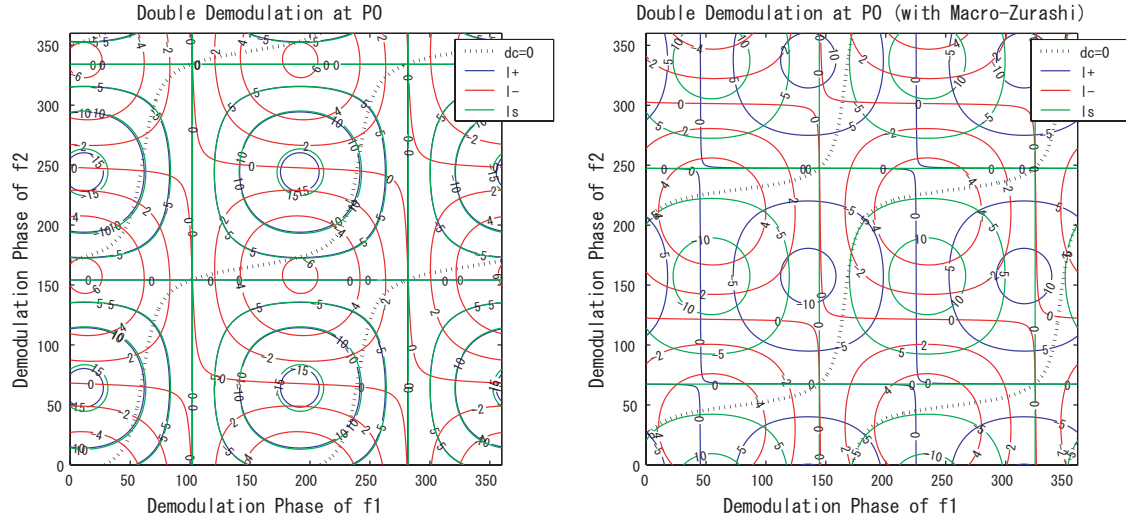


図 4.1: LIGO 法における PO での復調位相平面。左がマクロずらししないときのものが右がマクロずらししたときのものである。

Double demodulation は元々  $f_1$  の運ぶ  $l_-$  と  $f_2$  の運ぶ  $l_-$  とを分けるための技術であった [14]。図 4.2 上段に示すように、差動信号は2つの位相点に分割される一方で同相信号は1つの位相点からまとめて取れてしまう。その結果、復調位相平面上のどの点でとって分れないのであった。

ところが、ここでどちらかの sideband を recycling cavity で共振からずらすと状況が変わる。例えば LIGO 法で asymmetry を  $\pi/2$  として power-recycling cavity を 40cm 縮めて signal-recycling cavity を 40cm 伸ばすと、 $f_2$  が複合共振器で共振という状態を保ったまま  $f_1$  が power-recycling cavity で共振と反共振の間に来ることになり、 $l_+$  と  $l_s$  の復調位相空間上での縮退が解ける (図 4.1 右)。この操作を「マクロずらし」と呼んでいる。Detuned RSE の detuning と違い、cavity 長を変えつつも carrier の共振状態は変えていない。

直観的には図 4.2 下段のように説明すると分かりやすいと思う。参考文献 [23][24][25] を元に行なった解析計算 (Appendix A) が示すように、マクロずらしをすることで  $f_1$  の運ぶ  $l_+$  信号が I-phase と Q-phase の両方に現れ、従来取得していた位相点での信号量を減らす一方で、それまで信号がなかった位相点での取得を可能にする。前者をうまく利用すれば  $f_2$  が運ぶ  $l_+$  と相殺して  $l_s$  のみを取得することができ、後者から  $l_+$  を取ればよい。信号量が減るといふ点は digital な対角化と同じである。また、 $f_2$  の I-phase に  $l_-$  が現れるということも同時に起きており、この結果  $l_s$  の最大点では  $l_-$  が混ざってしまうが、実際に計算すると影響はわずかで、 $l_-$  が現れないような位相点で  $l_s$  を取得しても最大点での信号量と大差ないことが分かっている。

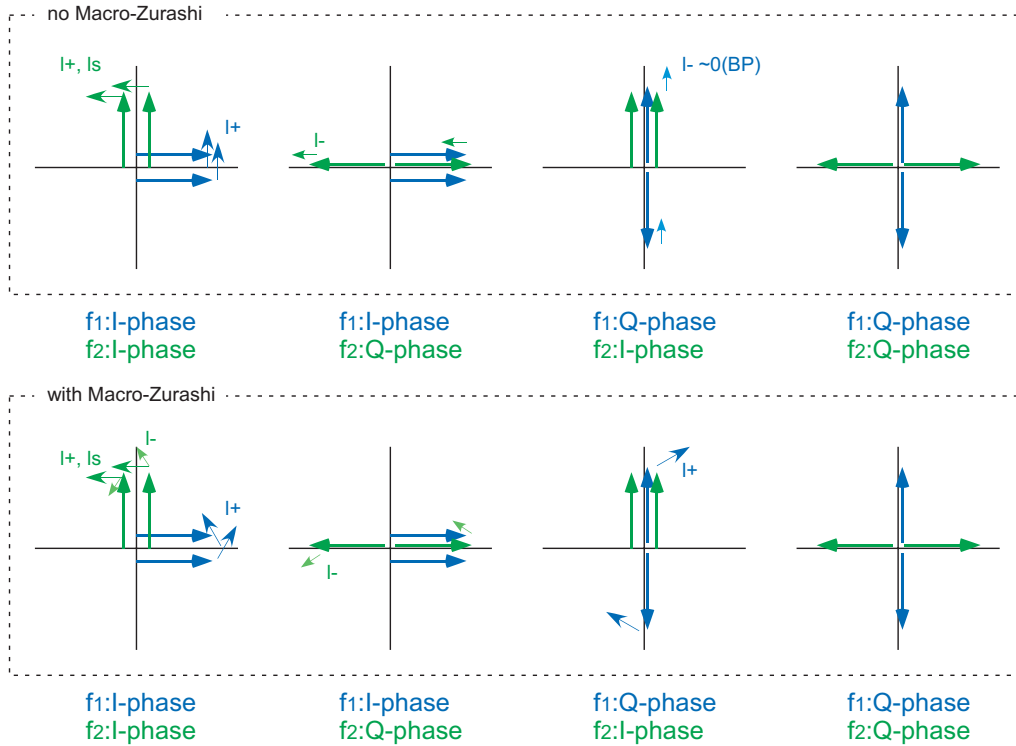


図 4.2: 位相空間でマクロずらしを説明する。

### Section 4.3

## 対角化の条件

さて、前節で紹介した方法は PO port で 3 つの small 系信号が対角化するというものであったが、PO port はもっとも shot noise が大きい port であり、特に  $l_-$  へ直接寄与する  $l_-$  をここで取得してしまうと回り込みによる雑音が増加し重力波検出感度を制限してしまう可能性が高く、問題である。そこで  $l_-$  だけはやはり DP で取らねばならないのだが、図 4.3 に示すようにマクロずらしの影響で  $l_-$  と  $l_+$  が重なってしまっている。これでは対角化はできないのである。

ちなみに低周波法で対角化を試みても同じ問題に突き当たる。さらに低周波法の場合は、2 つの sideband の周波数が近いことが災いして PO だけで見ても対角化は難しいことが分かっている。

実は、DP での  $l_-$  の独立取得をするには  $f_1$  の周波数をこれまでの手法と変えることがポイントとなる。LIGO 法にしろ低周波法にしろ  $f_1$  にとっての asymmetry をできる限り小さくして signal-recycling cavity の影響を最小限にするように努めたが、わずかながら Michelson 干渉計を透過してくると DP で  $l_+$  や  $l_s$  が現れる元になってしまうのである。そこで  $f_1$  にとって asymmetry が  $\pi$  もしくは  $3\pi$  などになるようにして Michelson 干渉計を完全反射するようにすれば、DP には  $l_-$  しか現れないことになる。

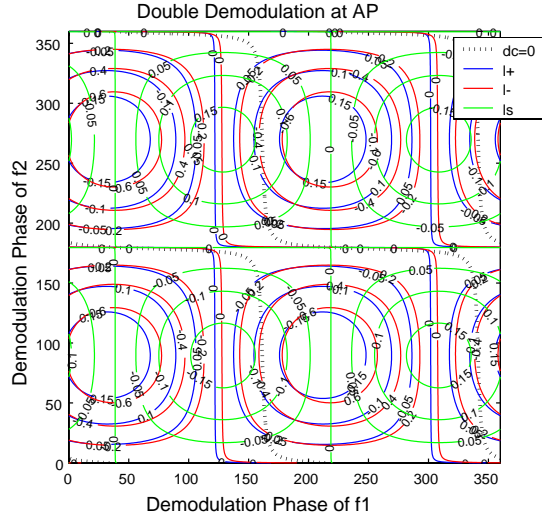


図 4.3: マクロずらししたときの LIGO 法における DP での復調位相平面。

ここで、asymmetry が  $2\pi$  だと都合が悪い理由は、power-recycling cavity で carrier が反共振、asymmetry が  $\pi/2$  になる  $f_2$  が共振もしくは反共振でなければならないので、もし  $f_1$  の asymmetry が  $2\pi$  や  $4\pi$  だと  $f_1$  が反共振になってしまうからである。また、 $f_1$  にとっての asymmetry が  $\pi$  で  $f_2$  にとっての asymmetry が  $\pi/2$  ということは、倍波の関係になってしまい double demodulation の際に不都合が生じるから、 $f_1$  にとっての asymmetry は  $3\pi$  がよいだろう。

---

## Section 4.4

---

### 対角化法

---

以上をふまえて開発されたのが対角化法である [23]。Sideband の周波数は  $f_1 = 150\text{MHz}$ 、 $f_2 = 25\text{MHz}$  とする。重力波検出に用いる  $f_2$  の周波数は低く、double demodulation の周波数も  $200\text{MHz}$  以内に設定されている。ただし、asymmetry 長はこれまでの手法より長く、

$$\Delta\ell = \frac{c}{4 \times 25\text{MHz}} = 2.99792458\text{m} \quad (4.1)$$

となる。Asymmetry 長が長い場合に検出器感度に関わってくるかどうかは第 5 章で議論する。

LCGT の実用面からの要請 (第 3.3 節) をふまえると、power-recycling cavity の FSR を  $(50/19)\text{MHz}$ 、signal-recycling cavity の FSR を  $(50/21)\text{MHz}$  にするのが適当である。各々

の cavity 長は、

$$\ell_{\text{pr}} = \frac{19c}{2 \times 50\text{MHz}} + 2.5\text{cm} = 56.98556702\text{m} \quad (4.2)$$

$$\ell_{\text{sr}} = \frac{21c}{2 \times 50\text{MHz}} - 2.5\text{cm} = 62.93141618\text{m} \quad (4.3)$$

となる。これらの parameter を用いて計算した信号取得マトリクスが表 4.1 である。

	Port	Demod.	$L_+$	$L_-$	$\ell_+$	$\ell_-$	$\ell_s$	norm.
$L_+$	PO	$f_2$	<b>1</b>	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	10029
$L_-$	DP	$f_2$	-0.000	<b>1</b>	-0.000	0.001	-0.000	284
$\ell_+$	BP	DDM	-0.003	0.000	<b>1</b>	0.000	-0.506	0.082
$\ell_-$	DP	DDM	0.000	0.003	-0.000	<b>1</b>	-0.000	0.019
$\ell_s$	PO	DDM	-0.004	0.000	1.192	0.000	<b>1</b>	0.323

	Port	Demod.	$L_+$	$L_-$	$\ell_+$	$\ell_-$	$\ell_s$	norm.
$L_+$	PO	$f_2$	<b>1</b>	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	10028
$L_-$	DP	$f_2$	-0.000	<b>1</b>	-0.000	0.001	-0.000	284
$\ell_+$	PO	DDM	-0.003	-0.000	<b>1</b>	0	0	0.169
$\ell_-$	DP	DDM	0.000	0.003	0	<b>1</b>	0	0.013
$\ell_s$	PO	DDM	-0.000	0.000	0	0	<b>1</b>	0.208

表 4.1: 150-25MHz 法を用いた場合の信号取得マトリクス。上段がマクロずらし無しのもので、下段がマクロずらしを施し対角化したもの。マクロずらしをすると  $\ell_s$  信号が少し減るが、PO における復調位相空間で small 系各信号が分離する。ここで  $\ell_-$  は shot noise の関係で DP から取らねばならないが、DP には  $\ell_+$  や  $\ell_s$  が混入しないのでこの部分も対角化される。

---

## Section 4.5

---

### 合併法

---

前節の手法では LIGO 法を参考にして  $f_2$  にとっての asymmetry が  $\pi/2$  になるようにしたが、低周波法のような asymmetry の選び方も可能である。そうすると倍波の関係を危惧せずともよいので  $f_1$  にとっての asymmetry を  $\pi$  にすることができ、asymmetry 長を小さくすることができる。しかし一方で低周波法では  $f_2$  にとっての asymmetry が  $0.16193201\text{rad}$  付近であるべきという拘束条件もあり、 $f_1$  と  $f_2$  はおよそ 19.4:1 の比率を満たしつつその公約数が power-recycling cavity の FSR の半分でなければならない。またさらに LCGT の実用面からの要請もふまえると、 $f_1$  を 190.4MHz、 $f_2$  を 9.8MHz にして、power-recycling cavity の FSR を 2.8MHz、signal-recycling cavity の FSR を  $(9.8/4)\text{MHz}$  にするのが適当である。Asymmetry 長は

$$\Delta\ell = \frac{c}{2 \times 190.4\text{MHz}} = 0.78727011\text{m} \quad (4.4)$$

となり、各々の cavity 長は、

$$\ell_{\text{pr}} = \frac{c}{2 \times 2.8\text{MHz}} + 1.6\text{cm} = 53.51836750\text{m} \quad (4.5)$$

$$\ell_{\text{sr}} = \frac{4c}{2 \times 9.8\text{MHz}} = 61.18213429\text{m} \quad (4.6)$$

となる。これらの parameter を用いて計算した信号取得マトリクスが表 4.2 である。

	Port	Demod.	$L_+$	$L_-$	$\ell_+$	$\ell_-$	$\ell_s$	norm.
$L_+$	PO	$f_2$	<b>1</b>	0.000	-0.001	0.000	0.000	12435
$L_-$	DP	$f_2$	-0.000	<b>1</b>	-0.000	0.001	-0.000	288
$\ell_+$	PO	DDM	-0.001	-0.000	<b>1</b>	0	0	0.298
$\ell_-$	DP	DDM	-0.000	0.001	0	<b>1</b>	0	0.023
$\ell_s$	PO	DDM	0.001	-0.000	0	0	<b>1</b>	0.243

表 4.2: 190.4-9.8MHz 法を用いた場合の信号取得マトリクス。

## 4つの制御法の分類と比較

---

### Section 5.1

---

#### ここまでのまとめ

---

RSEの制御法の基本となっているのは、2つの sideband を用意して片方がより多くの  $\ell_s$  を、もう片方がより少ない  $\ell_s$  を運ぶようにすることである。AdLIGO では Michelson 干渉計をほぼ反射してくる  $f_1 = 9\text{MHz}$  と asymmetry が  $\pi/2$  になって Michelson 干渉計を完全透過する  $f_2 = 180\text{MHz}$  を用いるという制御法が採用される。LCGT は detuning が無いということと RF 復調による信号取得をするという観点から、AdLIGO の方法を基盤としていくつかの工夫が加えられた。

低周波法 Asymmetry を 0.16rad にすることで完全透過と同等に制御信号が取れることを利用して、 $f_2$  を低周波にすることができるようになった

公約数の利用 Mode cleaner や power-recycling cavity で2つの sideband を共振させるには、9-180のような直接倍数でなくても、公約数を FSR に適用すれば高調波の影響がない

完全反射 sideband Michelson 干渉計をほぼ反射する  $f_1$  の代わりに完全反射する  $f_1$  を用いることで、asymmetry 長が増す一方で sideband 間に完全な contrast が実現できるようになった。

以上の工夫を取り入れ、4つの手法が考え出された。これらを  $f_1$  および  $f_2$  の取り方で分類することができる(表 5.1)。各々の sideband にとっての  $\alpha$  を高く取るか低く取るかの4通りだったわけである。

LIGO 法は  $f_2$  の周波数が高いので LCGT では採用を見合わせたい。その他の3つのうちの手法を LCGT に採用すべきかということについては、asymmetry が大きいとどれだけ問題かという議論と、対角化がどれだけ必要かという議論が必要で、さらに細かな違いについても考えていかねばならない。



		f1(reso at PRC)	
		<0.1rad	$\pi$ or $3\pi$
f2(reso at PRSRC)	$\sim\pi/2$	<b>AdLIGO</b> 9-180MHz asym=42cm digital diagonalization	<b>Diagonalization</b> 150-25MHz asym=300cm optical diagonalization
	0.16rad	<b>Low-freq</b> 15-35MHz asym=22cm digital diagonalization	<b>Merged plan</b> 190.4-9.8MHz asym=79cm optical diagonalization

図 5.1: 制御法を sideband の周波数で分類。

---

## Section 5.2

---

# Asymmetry 長

---

現在稼動している重力波検出器の asymmetry 長は数十 cm であり、あまり長くすることは直感的によくはないのではないかと思われたが、果たしてそうだろうか。例えば LIGO の asymmetry 長は 30cm 前後だが、これは周波数雑音などの要請から来たわけではなく、sideband を power-recycling cavity で critical coupling にして制御信号の分離度を上げるためであった。ここでは asymmetry 長が大きい場合に考えうる問題について吟味していく。

### 5.2.1 周波数雑音

図 5.2 は LCGT における光源の周波数雑音から検出器感度への伝達関数 (計算値) を表す。理想的な場合は周波数雑音は完全に同相除去されるので、DP に現れるのは asymmetry 長による時間差が生み出すものだけなのだが、実際は sideband が運んで contrast defect と coupling するもの (青) が支配的である。確かに両腕の時間差によるものもある (水色) が、これは finesse 差が支配的で asymmetry 長は無関係であると言える。ちなみに紫色の曲線は周波数雑音が腕の rms 揺らぎで位相変化を受けて振幅雑音になり、輻射圧雑音を引き起こして現れる雑音で、橙色は contrast defect が運ぶ周波数雑音が sideband と coupling して表れたものである。

なお、parameter としては finesse $1250 \pm 6$ 、mirror 重量 30kg、laser power 75W、腕の RMS 揺らぎ  $10^{-12}\text{m}$  が想定されている。最終的な design としては finesse は 1500 程

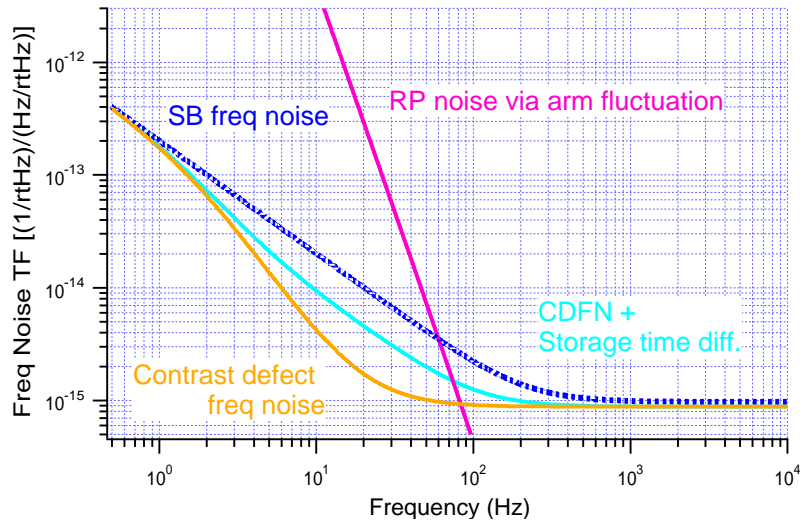


図 5.2: LCGT における光源の周波数雑音から検出器感度への伝達関数。

度になる可能性があるが、本書を通して 1250 で計算してある。ちなみに PRFPMI では power-recycling cavity での filtering 効果で carrier が運ぶ周波数雑音が小さくなるのだが、RSE では、それが signal-recycling cavity で逆 filtering されるため、高周波では再びほぼ等しくなっている。ここでは和としての周波数雑音伝達関数は計算していないが、もしかしたらある程度相殺するのかもしれない。

### 5.2.2 Mode-mismatching による腕内 power の減少

Mode-matching については、LCGT が 3km であるために 300m の TAMA よりも asymmetry による影響は少ないことが予想される。いま mirror の曲率が両腕で同じだとして、waist 位置が少なくとも asymmetry の半分ずつずれてしまうことになるが、それによって coupling は

$$\left\langle z \left| z - \frac{d}{2} \right\rangle = \frac{z_R}{z_R + id/4} \quad (5.1)$$

に変わるだけ [26] であり、 $z_R = 4\text{km}$ 、 $d \sim 3\text{m}$  として腕内 power は  $4 \times 10^{-8}$  しか低くならない。両腕間誤差は waist を asymmetry の半分ずつずらせばなくなるので関係ない。

### 5.2.3 Mode-mismatching による TEM00 の phase shift

腕内の power は問題ないが、異なる mode を持った複合鏡で反射した電場は phase shift を受ける、つまり式 (5.1) に虚部があり、それが両腕について差動で効いてくるので、DP に carrier 成分がもれてくることになる。周波数雑音にしる強度雑音 [27] にしる DP にもれてくる carrier は大きな問題となるのだが、ここでもれてくる carrier は contrast defect とは位相が直交しており、 $\ell_-$  に offset が乗って相殺し、光としてはもれてこない。

ただし、 $l_-$  に offset が乗るということは、上下の sideband が unbalance になるということであり、変調器雑音に乗るという問題につながる。しかし計算するとこれも大きな問題ではないことが分かる (詳細は Appendix B 参照)。

---

Section 5.3

---

直接対角化の必要性

---

第 4.1 章で述べたように制御という面では、各 port からの出力を演算して対角化することと直接対角化との違いは、信号量だけである。これまで紹介したマトリクスでは  $l_+$  取得 port の  $l_s$  と  $l_s$  取得 port の  $l_+$  とで符号が異なるなど、演算による対角化でも信号量の損はほとんどないので、違いはないと言ってよい。

また、 $l_+$  や  $l_s$  がもつ shot noise の  $l_-$  への回り込みについても演算による対角化をすれば消えてしまう。量子雑音は消えないように思うかもしれないが、回り込むのは shot noise が feedback されて鏡が動くという古典的な変位雑音なので、演算で対角化すれば出てこない。

さらに言えば、演算による対角化もしなくて大丈夫だと思われる。制御に関しては Caltech 40m で lock できるなら神岡ではさらに簡単に lock できるだろうし、shot-noise-limited-feedback-noise も図 5.3 に示すように  $L_-$  取得 port に混入する  $l_-$  が支配的であり small 系の対角化は影響がほとんどないからである。

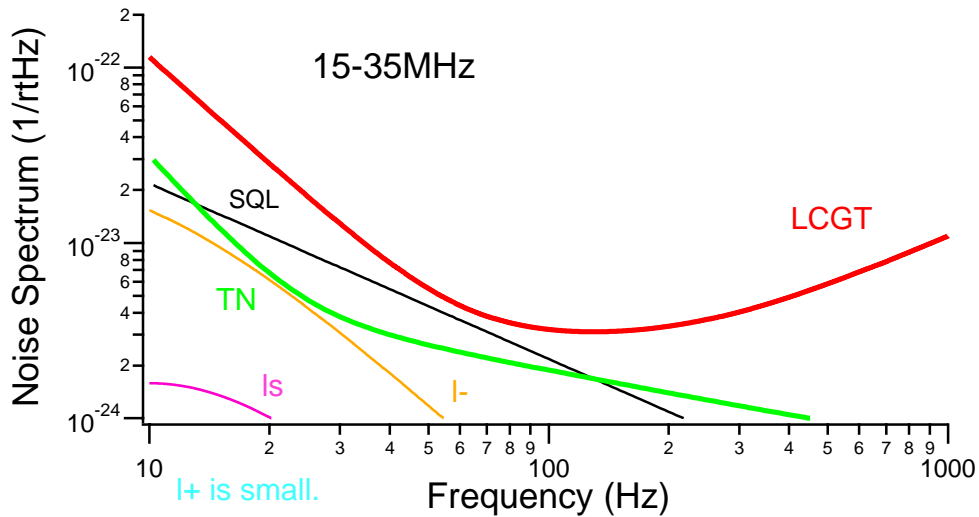


図 5.3: LCGT で 15-35MHz 法を用いた場合の small 系信号が持つ shot noise が  $L_-$  に回り込む雑音。Unity-gain 周波数は 10Hz とし、 $f^{-2}$  の servo を仮定している。マトリクスの  $l_-$  行における同相系信号の分離がよければ  $l_-$  以外はほぼ混入しない。

---

## Section 5.4

---

### その他の違い

---

ここまで、低周波法の長所である asymmetry の短さと、対角化法の長所である直接対角化のどちらも、あまり重要ではないことを示した。どちらも重要なら合併法を LCGT の制御法に推薦するところなのだが、どちらも重要でないということは、どの制御法を用いればよいのか決められなくなってくる。以下、他に考えられる細かな違いについて検討していく。

#### 5.4.1 Detuned-RSE への拡張性

LCGT は phase 1 でこそ RF 制御の broadband RSE だが、将来的には detuning をして連星に対する感度を上げるべきだと考える。そのときいかにスムーズに移行できるかがひとつのテーマとなってしかるべきである。Detuning は signal-recycling cavity の長さを変え、上下どちらかの  $f_2$  のみをそこで共振させることで可能となる。実際に SRM を動かす距離は 10cm 程度であり、unbalanced-sideband による変調雑音の増加を防ぐべく DC readout を組み込むのも、output mode-cleaner を交換するなど、大きな変更の必要ない作業である。

しかしここで、signal-recycling cavity の長さを変えるという点がマクロずらしと同じであり、両立しないことが分かる。直接対角化をするときのマクロずらしは、上下の sideband とともに共振からややずれ、carrier は元の共振条件を保つが、detuning は上下どちらかが共振してもう一方は非共振、carrier は共振から detune される、という違いがある。Servo の極性で切り替えられるが、ずらす長さが同じになるとは思えないし、detuned RSE ではマクロずらしによる対角化はできないことが分かる。

ただしこれは signal-recycling cavity のマクロずらしについてであり、power-recycling cavity のマクロずらしとは共存する。つまり 150-25MHz 法で用いたマクロずらしはできないが、190.4-9.8MHz 法のマクロずらしなら対角化することが可能かもしれない。これは計算してみないと分からない。

一方、detuning をしたときに少なからず問題となるであろう  $f_1$  の imbalance だが、LIGO 法や低周波法では生じてしまうが、完全反射である対角化法と合併法ではそれが生じない。マクロずらししない 150-25MHz 法も、対角化はできなくなるものの、ひとつの候補として残しておくべきであろう。

#### 5.4.2 Lock acquisition

Lock acquisition については Caltech 40m でさまざまな工夫がなされているが、制御法の中では  $f_1$  が完全反射する手法が優れている。なぜなら、先に中央の dual-recycling 部分を lock するとして、 $\ell_-$  を dither を使うなりして lock したときに  $f_1$  が SRM の影響を全く受けないので、carrier と  $f_1$  の beat 信号で  $\ell_+$  を lock することが比較的簡単に行なえるは

ずだからである。3つの自由度のうち2つを lock できれば最後に  $l_s$  を lock するのも簡単だと思われ、その後で  $l_{\pm}$  を double demodulation に切り替え、 $L_{\pm}$  を carrier と  $f_2$  で lock すればよいのである。

ただし、broadband RSE の場合、 $f_1$  は振幅変調で carrier と beat が取れないので、上記の話は detuned RSE に限った話で LCGT では関係ないかもしれない。

### 5.4.3 周波数について

第 5.3 節で  $l_-$  が運ぶ shot noise の  $L_-$  への回り込みについて述べたが、double demodulation の周波数が高いと  $l_-$  を取得する際の量子効率が落ちるので、図 5.3 よりも影響が増してしまうことが考えられる。量子効率を低下させないために  $L_-$  を取得する  $f_2$  の周波数を低くすることは考えてきたが、この問題については AdLIGO でもまだ考えられていない。もし効率が半桁悪くなると LCGT の最高感度が  $l_-$  の shot noise で制限されてしまうことになる (実際その場合は変調指数を上げれば改善するのだが)。

また、高出力の光を EOM に通したことはいままでなく、変調指数が制限されるかもしれないという指摘もある<sup>[28]</sup>。これらをふまえると低周波法が優れているということになるが、もし本当に asymmetry 長がかなり長くても問題ないのであれば、150-25MHz 法を 60-10MHz に変えて (asymmetry 長は 7.5m) しまうのもありかもしれない。

DP には  $f_1$  はほとんどもれてこないが、 $l_-$  の信号 sideband だけはもれてくるので、output MC は  $f_2$  だけでなく  $f_1$  の周波数も透過させなければならない。その意味でも 15-35MHz や 60-10MHz のように両方が低いということは sideband を両方透過させるという条件の下で output MC の finesse を高く設定できるという利点がある。

## 考察いろいろ

**Alignment 制御** 本書では長さ制御だけについて考えてきたが、alignment 制御をふまえた議論も必要不可欠である。たとえば、 $f_1$  と  $f_2$  以外に recycling cavity に入っていない non-resonant sideband が必要になるという話も出てくるだろう [29]

**周波数安定化** 第3の sideband は周波数安定化という点でも必要になってくる。高い安定度を得るには  $L_+$  の shot noise level を下げるべきであり、本書の計算で用いたように PO から取得する方式より BP から取得する方がよい。RSE 制御では BP に存在するのは振幅変調  $f_1$  と少量の位相変調  $f_2$  だけで、もうひとつ位相変調  $f_3$  を用意する必要があるのである。ちなみに Mach-Zehnder は1つで十分で、 $f_3$  を用意する手間は小さい。

**BP/PO output MC** Output MC が dither で local に lock できるのであれば、BP や PO にも設置した方がいいのではないかと思う。特に BP では critical coupling が見込まれている  $f_2$  の junk light が double demodulation 信号を汚くする可能性があり、また  $L_+$  信号取得の際に shot noise を悪化させる原因にもなる。

**Sub-carrier の利用** 本書で紹介した方法は全て carrier と2つの sideband という構成だったが、carrier と1つの sideband、そして sub-carrier とその sideband という電場構成にすることも可能である [30]。周波数としては Michelson 完全透過と完全反射を用いる部分は他の方法と類似で、carrier 周りの sideband は半分透過くらいにして  $L_{\pm}$  制御に用いる。この方法の特徴は2つある。1つ目は double demodulation を用いないことで、直接対角化はできないが調整は楽になるかもしれない。2つ目は Mach-Zehnder 雑音が入らないことで、その代わりに偏光を使うなどの工夫が必要となる(偏光を使わずとも mode cleaner を利用して sub-carrier を足すことも可能だと思う)。信号量には大差がない。私見としては、sub-carrier を carrier に足す工夫の部分が大きな課題だと思う。

# 結論

これを読んだ上で議論をしてもらい、結論を出すというのが本書の目的であるのだから、結論というのをここに書くのは本末転倒である。と前置きした上で私見を展開すると、以下のような評価となる。

**D 評価：9-180MHz 法** 重力波を取得する  $f_2$  が高いというのは致命的。DC readout にすれば解決するが、double demodulation の周波数が高いという問題は残る。長所としては AdLIGO とほぼ同じ構造だから LCGT だけ失敗する可能性が低いという点くらい。

**D 評価：15-50MHz 法** 制御信号が小さいのが難点、とは言え factor 倍の差なら大きな問題ではない。しかしマトリクスを見ると  $l_-$  の行で  $l_+$  と  $l_s$  が混入しており、 $f_1$  と  $f_2$  の contrast が低いことの問題が表れている。計算すると、これらの shot noise の回り込みが検出器感度に影響を及ぼしてしまうことが分かる。

**C 評価：190.4-9.8MHz 法** マクロずらしと detuning が両立するという長所がある一方<sup>1</sup>、asymmetry の束縛条件が  $f_1$  と  $f_2$  の両方にかかっており、調整が難しいかもしれない。言い換えれば、 $f_2$  にとっての  $\alpha$  を  $\pi$  にしたとき、loss などで recycling cavity の finesse が想定からずれた分だけ  $f_1$  が critical coupling からずれる仕方がない、ということ。

**B 評価：150-25MHz 法 (マクロずらし)** Detuning と両立しない分<sup>2</sup>、A 評価から落としたが、 $f_1$  の完全反射は魅力的。Asymmetry は 3m だが、これまでの考察の結果からすると致命的な問題は見当たらない。周波数が高いのも好ましくないで、次に A 評価としたバージョンは周波数の低下を条件とする。

**A 評価：150-25MHz 法 (マクロずらさず)** 60-10MHz マクロずらしはしないで、detuning への拡張性を重視したい。A 評価の理由は  $f_1$  の完全反射と周波数構成の simple さ。Asymmetry 長が 7.5m となるが周波数が全体的に低くなる。

**A 評価：15-35MHz 法** Asymmetry が長いのはなんとなくいやな予感がする、という部分で 60-10MHz 法を上回る一方、完全反射の方が lock acquisition が smooth かもしれない、という部分で下回る。直接対角化はできないが、信号分離は良好。大きな部分で何も問題はないと思う。

---

<sup>1</sup>確かめたわけではない。

<sup>2</sup>確かめたわけではない。

## 対角化の解析計算

ここでは図 4.2 で示した位相関係の解析計算を記しておく。Michelson 干渉計に関して  $f_1$  は完全反射、 $f_2$  は完全透過とする。LIGO 法では  $f_1$  がやや透過するが、ほぼ完全反射とみなしてよいだろう。

参考文献 [23][24][25] に従うと、マクロずらしした RSE 干渉計の反射率、すなわち BP における電場の係数は次式で表せる。

$$P^\pm = \frac{t_p}{1 + r_p e^{-i(\psi_\pm \pm \Delta)} \left[ \cos(\alpha + \psi_-) + \frac{-\sin^2(\alpha + \psi_-) r_s e^{-i(\psi_s \mp \Delta)}}{1 + r_s e^{-i(\psi_s \mp \Delta)} \cos(\alpha + \psi_s)} \right]} \quad (\text{A.1})$$

ここでマクロずらしは  $f_2$  の共振条件が変わらないように power-recycling cavity を  $\Delta$  rad 分だけ伸ばしつつ signal-recycling cavity を  $\Delta$  rad 分だけ縮めている。振幅変調 (150MHz)、位相変調 (25MHz) それぞれの upper sideband と lower sideband の電場を計算すると、

$$P_{\text{AM}}^+ e^{i(\omega_0 + \omega_1)t} \simeq \frac{t_p}{|1 - r_p e^{-i\Delta}|} e^{i[(\omega_0 + \omega_1)t + \zeta]} \left( 1 + \frac{-r_p \sin \Delta + i(r_p^2 - r_p \cos \Delta)}{|1 - r_p e^{-i\Delta}|} \psi_+ \right) \quad (\text{A.2})$$

$$P_{\text{AM}}^- e^{i(\omega_0 - \omega_1)t} \simeq \frac{t_p}{|1 - r_p e^{-i\Delta}|} e^{i[(\omega_0 - \omega_1)t - \zeta]} \left( 1 + \frac{r_p \sin \Delta + i(r_p^2 - r_p \cos \Delta)}{|1 - r_p e^{-i\Delta}|} \psi_+ \right) \quad (\text{A.3})$$

$$P_{\text{PM}}^+ e^{i(\omega_0 + \omega_2)t} \simeq \frac{t_p \cdot e^{i(\omega_0 + \omega_2)t}}{1 - r_p r_s} \left\{ 1 - \frac{r_p r_s}{1 - r_p r_s} (i[\psi_+ + \psi_s - r_s \sin \Delta \cdot \psi_-] + r_s \cos \Delta \cdot \psi_-) \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$P_{\text{PM}}^- e^{i(\omega_0 - \omega_2)t} \simeq \frac{-t_p \cdot e^{i(\omega_0 - \omega_2)t}}{1 - r_p r_s} \left\{ 1 - \frac{r_p r_s}{1 - r_p r_s} (i[\psi_+ + \psi_s - r_s \sin \Delta \cdot \psi_-] - r_s \cos \Delta \cdot \psi_-) \right\} \quad (\text{A.5})$$

のようになる。各々の式における最後の括弧内では規格化した DC 成分と信号を持った AC 成分とが存在し、 $f_1$  は I-phase(ここでは虚部)、Q-phase(実部) の両方に  $l_+$  を、 $f_2$  は I-phase に  $l_+$ 、 $l_s$ 、 $l_-$  の全てと Q-phase に  $l_-$  を運んできているのが分かる。

低周波法や合併法では上記のようにはいかない。低周波法では 2 つの sideband の周波数が近いのでマクロずらしによる対角化は困難で、どちらかの周波数を変えるしかないが、mode cleaner を透過させるためには周波数の選択に条件が付き、離散的にしか解がない。合併法では signal-recycling cavity のみをマクロずらしするとうまくいくことが分かっているが、解析計算については省略する。



## Mode-mismatching による変調雑音

Asymmetry が  $2d$  あると、mode-mismatching による TEM00 光の phase shift が

$$\langle z_0, z_R | z_0 \pm d, z_R \rangle = \frac{1}{1 \mp id/2z_R} \simeq 1 \pm \frac{id}{2z_R} \quad (\text{B.1})$$

だけ起こる。この結果、DP で  $\ell_-$  信号を取得する double demodulation 出力は

$$\text{DDM} \cdot \text{QQ} \simeq 4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \left( \phi_{\ell_-} - \frac{d}{2z_R} \right) \quad (\text{B.2})$$

となり、信号に offset が乗ることになる。この offset は制御により相殺され、DP に carrier 成分の光がもれることはなくなるが、その代わりに上下の sideband 間に imbalance が生じることになる (図 B.1)。

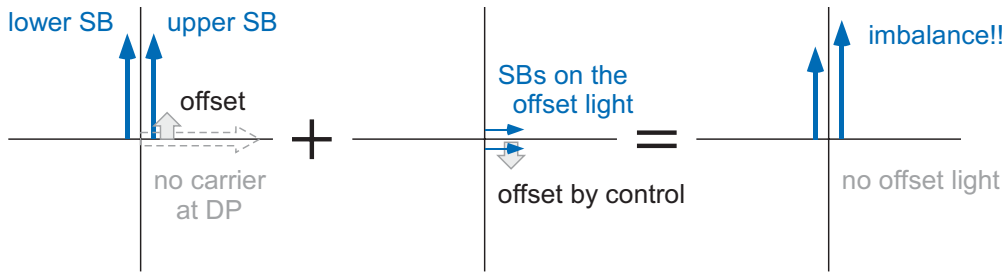


図 B.1: 本来 carrier がある位相と直交する位相に offset 光が存在すると、 $\ell_-$  の制御で打ち消されるが、その際、sideband に imbalance が生じる。

Sideband 間に imbalance が生じると変調を生み出す発振器の位相雑音が contrast defect と coupling して雑音となる。LCGT の場合どれくらいの変調雑音が入るのか見積もってみよう。Sideband は BP から DP へ完全透過するとして、

$$\text{Signal} = \sqrt{2\kappa} \frac{h}{h_{\text{SQL}}} \times 2J_1 \times \frac{t_R}{1 + r_R r_0} \frac{-\tau}{1 + \rho e^{2i\beta}} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Noise} = \Delta\phi_{\text{RF}} \frac{d}{z_R} \frac{r_0 \xi_{\text{CMRR}}}{2} \frac{\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2\beta}}{1 + \rho} \quad (\text{B.4})$$

$$\therefore h_n = \sqrt{\frac{\gamma^2 + \omega^2}{2\omega_0^2}} \Delta\phi_{\text{RF}} \frac{d}{z_R} \frac{r_0 \xi_{\text{CMRR}}}{2} \frac{\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2\beta}}{1 + \rho} \quad (\text{B.5})$$

となり、 $\gamma = 125$ ,  $d = 1.5$ ,  $z_R = 4000$ ,  $\Delta\phi_{\text{RF}} = 10^{-5} \text{rad}@100\text{Hz}$ ,  $\xi_{\text{CMRR}} = 10^{-3}$ ,  $\rho = 0.82$ ,  $\cos 2\beta = -0.92@100\text{Hz}$  として  $h_n \simeq 2.5 \times 10^{-26} (1/\sqrt{\text{Hz}})$  となる。まったく問題ない。

また、鏡の曲率精度からくる mode-mismatching を見積もると、waist 位置に換算して 30m 相当程度と asymmetry 長より大きくなるが、それでも問題にはならないことになる。

ただし、この見積もりはかなり大雑把なものであり、実際は位相雑音の EOM での filtering 効果や周波数特性を加味して計算せねばならない。また、鏡の曲率精度は flat mirror が  $R = 200\text{km}$  くらいにずれるという VIRGO の data を参考にしたが、sapphire だともっと厳しいかもしれない。LCGT は cryogenic にするため thermal compensation による mode-matching の微調整が不可能であるので、曲率精度に関しては注意が必要である。

## 関連図書

- [1] M.Ando *et al.*, Phys. Rev. Let. **86** 3950 (2001)
- [2] "LCGT design document", M.Ando *et al.*, 内部資料 (2003)
- [3] V.B.Braginsky, F.Ya.Khalili, "Quantum Measurement", ed. K.S.Thorne, Cambridge University Press, 1992
- [4] "Comparison of optical configurations for laser-interferometric gravitational-wave detectors", J.Mizuno (Doctor Thesis), 1995
- [5] AdLIGO については prototype である Caltech 40m の design report を見るのがよいだろう: "Conceptual Design of the 40 meter Laboratory Upgrade for prototyping a Advanced LIGO Interferometer", A.Weinstein *et al.*, internal report (2001)
- [6] A.Buonanno and Y.Chen, Phys. Rev. D **64**, 042006 (2001)
- [7] P.Fritschel, talk at Technical Plenary Session of the LSC meeting 2003, Hannover
- [8] A.Buonanno and Y.Chen, Phys. Rev. D **67** 062002 (2003)
- [9] "Stabilization of a Fabry-Perot Interferometer using a Suspension Point Interferometer", Y.Aso (Master Thesis), in Japanese, 2002
- [10] 中性子連星からの重力波に対する SN は broadband で RF readout だと約 200Mpc からの重力波で SN=10、detune で DC readout だと約 300Mpc からの重力波で SN=10 であることが分かっている。Event rate は距離の 3 乗に比例するので、この違いは 3 倍以上になる。
- [11] "Signal Extraction and Optical Design for an Advanced Gravitational Wave Interferometer", J.Mason (Doctor Thesis), 2001; もしくは、J.Mason and P.Willems, Appl. Opt. **42**, vol.7, p.1269 (2003)
- [12] "Development of a Variable-Bandwidth Laser Interferometer Gravitational Wave Detector", O.Miyakawa (Doctor Thesis), 2002
- [13] P.Beyersdorf *et al.*, preparing for submission to Applied Optics
- [14] "Investigation of radiation pressure effect in a frequency-detuned interferometer and development of the readout scheme for a gravitational-wave detector", K.Somiya (Doctor Thesis), 2004
- [15] K.Somiya, Phys. Rev. D **67** 122001 (2003)

- [16] "Experimental Investigations into Advanced Configurations and Optical Techniques for Laser Interferometric Gravitational Wave Detectors", B.Barr (Doctor Thesis), 2003
- [17] K.Somiya, "Analytical Calculation of Frequency Noise in the Spectrum of the 40m RSE Interferometer," LIGO-T040180-00 R (2004)
- [18] B.Cusack, B.Sheard, D.Shaddock, M.Gray, P.Lam, and S.Whitcomb, Appl. Opt. **43**, 5079 (2004) ; もしくは P.Beyersdorf の内部資料 :  
[http://www.ligo.caltech.edu/cit40m/Docs/Beyersdorf\\_VirtualMZ.pdf](http://www.ligo.caltech.edu/cit40m/Docs/Beyersdorf_VirtualMZ.pdf)
- [19] FINESSE: Frequency domain INterferomEter Simulation SoftwarE is a interferometer simulation program written in C, made by A.Freise. See <http://www.rzg.mpg.de/adf/>
- [20] D.Sigg, "Schnupp Asymmetry of the 4K Interferometers," LIGO-T030066-00 (2003)
- [21] "Robust extraction of control signals for power-recycled interferometric gravitational-wave detectors", K.Arai (Doctor Thesis)
- [22] 誰の意見か分からないが、LSC で聞いた気がする。
- [23] S.Sato, in preparation
- [24] "" , 川添史子 (修士論文)
- [25] "" , 苔山圭以子 (内部資料)
- [26] 重力波アンテナ技術検討書, 三尾典克, 大橋正健編 (1992)
- [27] "RSE における強度雑音について", 宗宮健太郎, 技術検討会 (2004 年 12 月)
- [28] 森脇成典氏が 2005 年 1 月の LCGT 干渉計デザイン会議で指摘したもの。
- [29] 佐藤修一氏の計算によるもの。
- [30] 安東正樹氏が 2005 年 1 月の LCGT デザイン会議で提唱したもの。