

0.1 二段振り子

二段振り子について考える。上段のみにダンパーが付いていて相対変位センサーを使って上段の mass の変位を読み、上段にフィードバックすることでダンピングをするというモデルを考える。それぞれの mass の位置を x_1, x_2 , 地面の位置を x_g とする。簡単のために 2 つの mass の質量は同じとし、ワイヤーの長さを l_1, l_2 とする。また、上段のみ速度ダンピングをかけ、ダンピング定数を γ_1 とする。さらに $\omega_i^2 = g/l_i (i = 1, 2)$ として、actuator noise を f_e として運動方程式を立てると。

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_1^2(x_1 - x_g) - \omega_2^2(x_1 - x_2) - \gamma_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_g) + f + f_e \\ \ddot{x}_2 = -\omega_2^2(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (0.1)$$

0.2 手計算

これらから、伝達関数行列を求めると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^4 + s^3\gamma_1 + s^2(\omega_1^2 + 2\omega_2^2) + s\gamma_1\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_2^2} \times \begin{pmatrix} (s^2 + \omega_2^2)(s\gamma_1 + \omega_1^2) & s^2 + \omega_2^2 & s^2 + \omega_2^2 \\ \omega_2^2(s\gamma_1 + \omega_1^2) & \omega_2^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ f \\ f_e \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

また、フィードバックフィルタとして $K(s)$ を用いる。センサーの出力とノイズをそれぞれ s_o, s_e として $f = K(s)(s_o + s_e) = K(s)(x_1 - x_g + s_e)$ なので、伝達関数を計算すると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s^2 + \omega_2^2)(Ks + s^2 + s\gamma_1 + \omega_1^2 + \omega_2^2) - \omega_2^4} \times \begin{pmatrix} (s^2 + \omega_2^2)(s\gamma_1 + \omega_1^2 + K(s)) & s^2 + \omega_2^2 & K(s)(s^2 + \omega_2^2) \\ \omega_2^2(s\gamma_1 + \omega_1^2 + K(s)) & \omega_2^2 & \omega_2^2 K(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ f_e \\ s_e \end{pmatrix} \quad (0.3)$$

0.3 mathematica を使ったシミュレーション

0.3.1 passive system の伝達関数

フィードバックをかけないシステムの伝達関数をプロットしたものが図 1,2 である。高周波では x_g からの伝達関数は上段下段それぞれ ω^{-1}, ω^{-3} に比例している。ダンパ無しの振り子に比べて、ダンパーが地面に設置されているため、地面振動に追従してしまうため傾斜が鈍ってしまう。

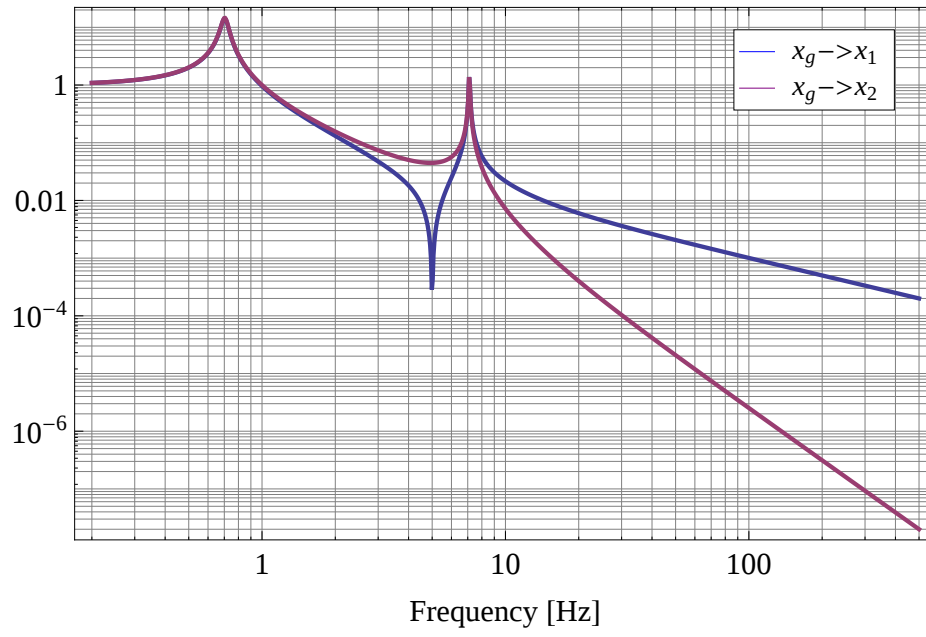


図1 TF function of passive system from x_g

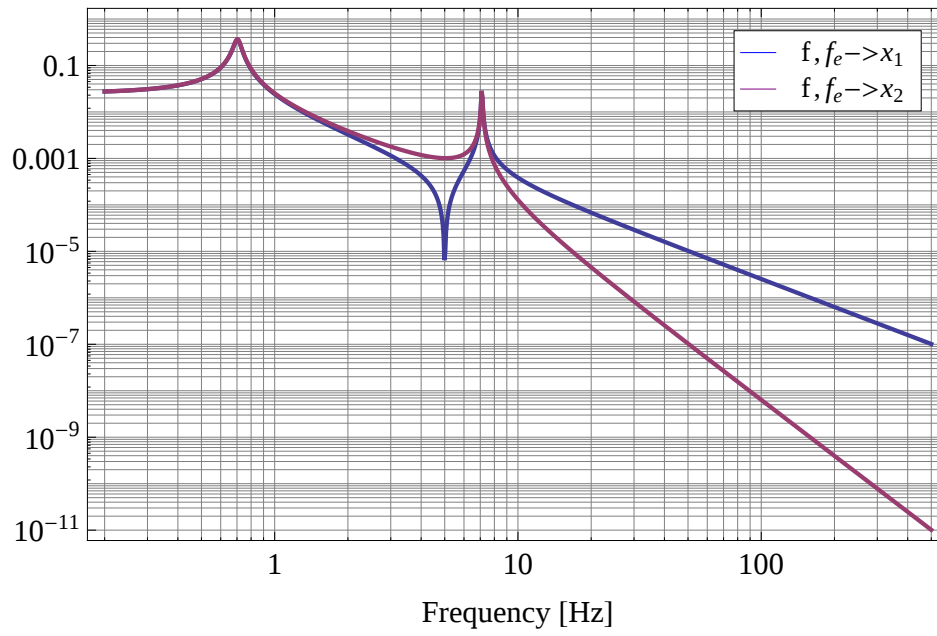


図2 TF function of passive system from f, f_e

0.3.2 Feedback Filter

feedback filter の伝達関数を

$$K(s) = \frac{G(s + w_z)}{s + w_p} \quad (0.4)$$

Active dumping simulation

とする。これらの Bode 線図は図 3 となる。

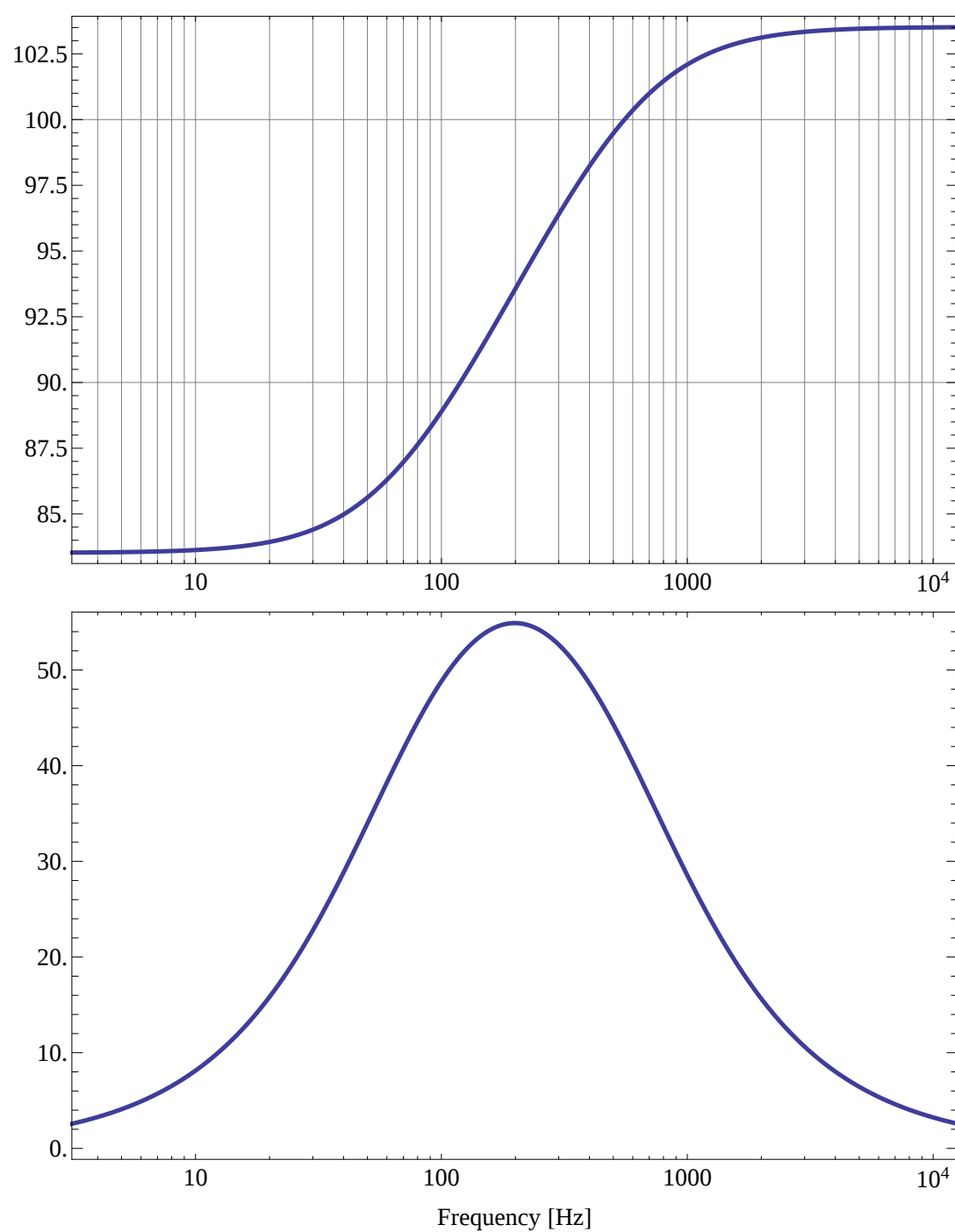


図 3 Feedback Filter

0.3.3 Openloop TF function

以上のシステムのオープンループ伝達関数は図 4 となる。色の違う 2 つのシステムはゲインを変えたシステムである。unity gain frequency はそれぞれ 35Hz, 65Hz 付近である。位相余裕はどちらも 40° 以上ある。

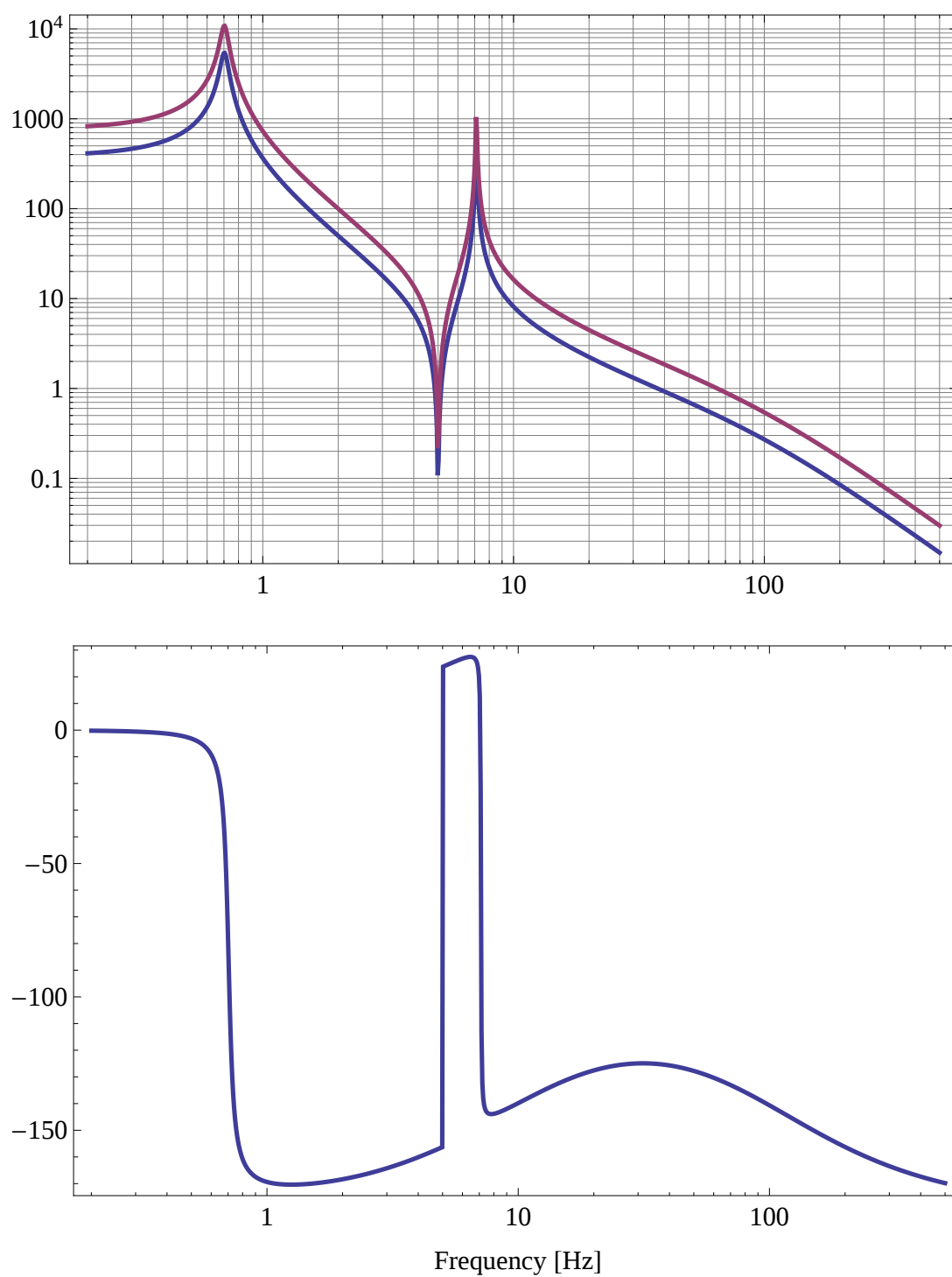


図 4 Openloop TF function

0.3.4 TF function from x_g to sensor output

地面振動からセンサー出力までの伝達関数を図 5 に示す。open loop gain が 1 より大きい周波数域（フィードバックがかかっている周波数域）では伝達関数が小さくなり、open loop gain が 1 より小

さい周波数域では、passive system と変わらない。

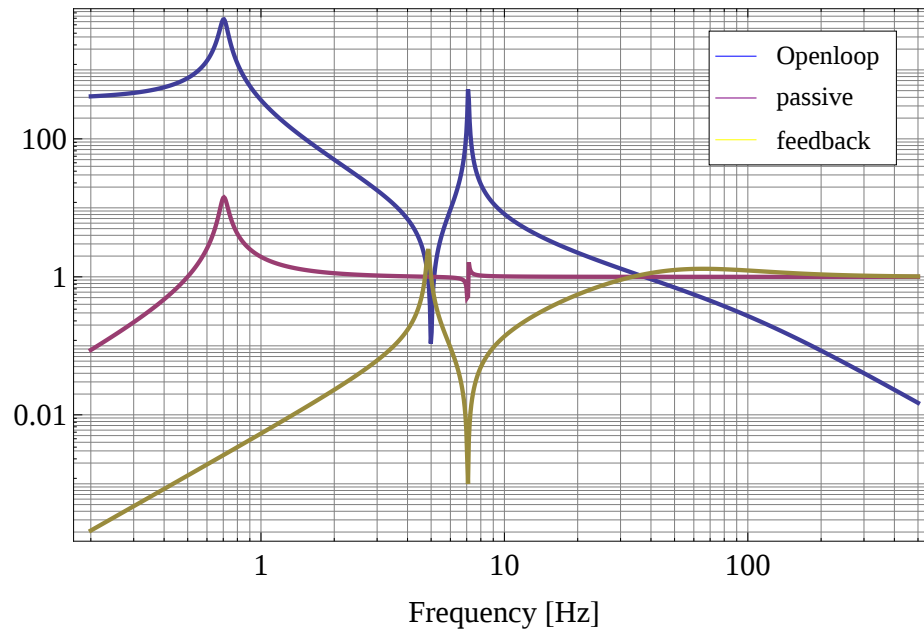


図5 TF function from x_g to sensor output

0.3.5 TF function from x_g to middle mass displacement

センサーの出力を見ればしっかりと制御ができているように見えていたが、センサーの出力は地面との相対変位を見ているために、実際の変位とは異なっている。そこでそれぞれの mass の変位について地面振動からの伝達関数を示したのが図 6,7 である。open loop gain が 1 より大きい周波数域では中段 mass は地面に追従し、下の mass は一弾振り子のように振る舞う。これは、フィードバック制御によりセンサーの出力までの伝達関数を小さくしようとしたために、中段 mass が地面に張り付いたように振舞ってしまうためである。

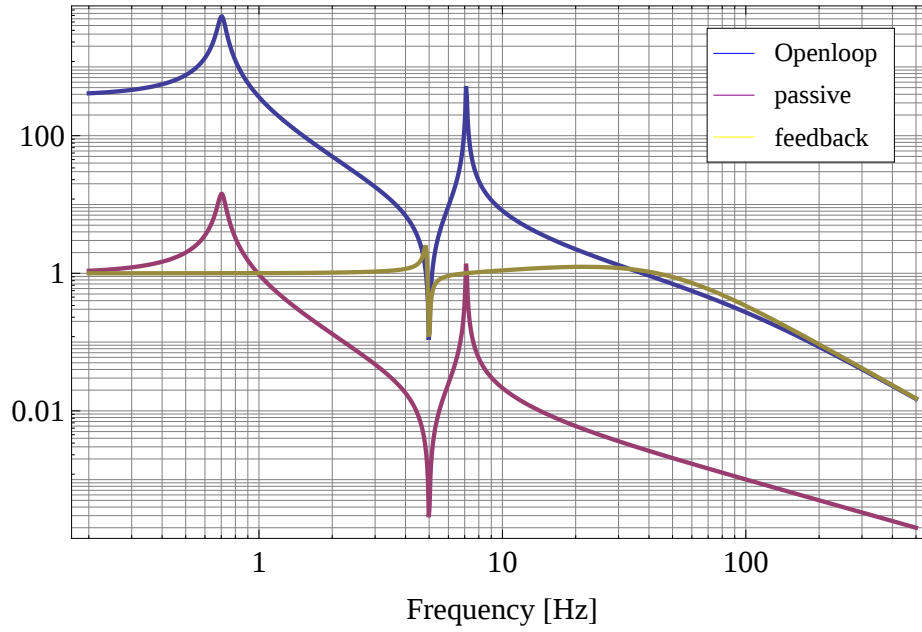


図 6 TF function from x_g to middle mass displacement

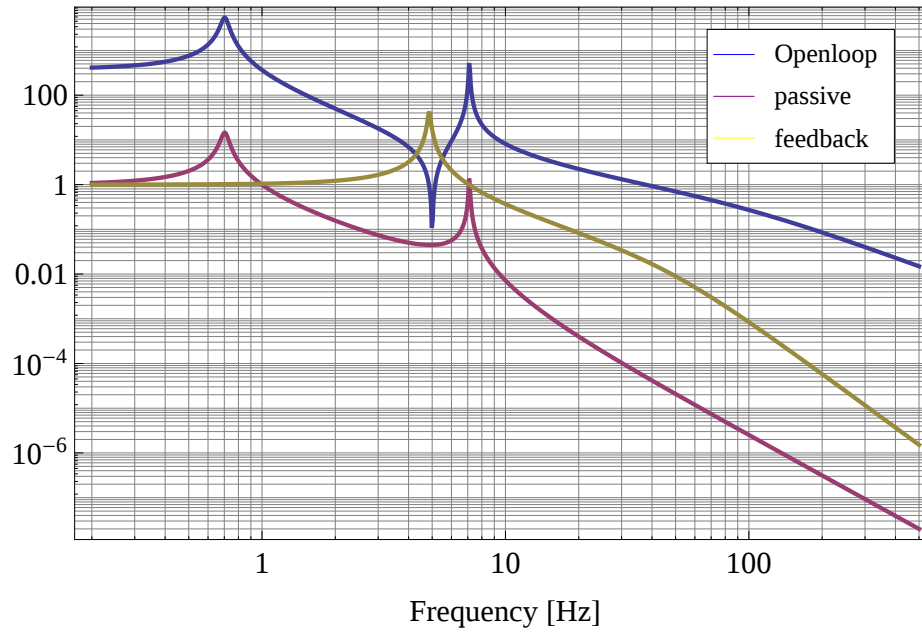


図 7 TF function from x_g to lower mass displacement

0.3.6 TF function from s_e

フィードバックゲインの違う 2 つのシステムにおいて、センサーの誤差からセンサーの出力までの伝達関数を図 8 に示す。open loop gain が 1 より大きい周波数域ではフィードバック制御により伝達関数は小さくなっていて、フィードバックゲインが大きいほうが大きく低減している。また、セン

サーの誤差から中段 mass までの伝達関数を図 9 に示す。open loop gain が 1 より大きい周波数域では伝達関数が大体 1 になっている。これは、制御がかかっている周波数域では、センサー出力を 0 に抑えようとするが、その出力にはセンサーノイズが入っているため、結果的にセンサーノイズと同じ量で揺らされることになるためである。

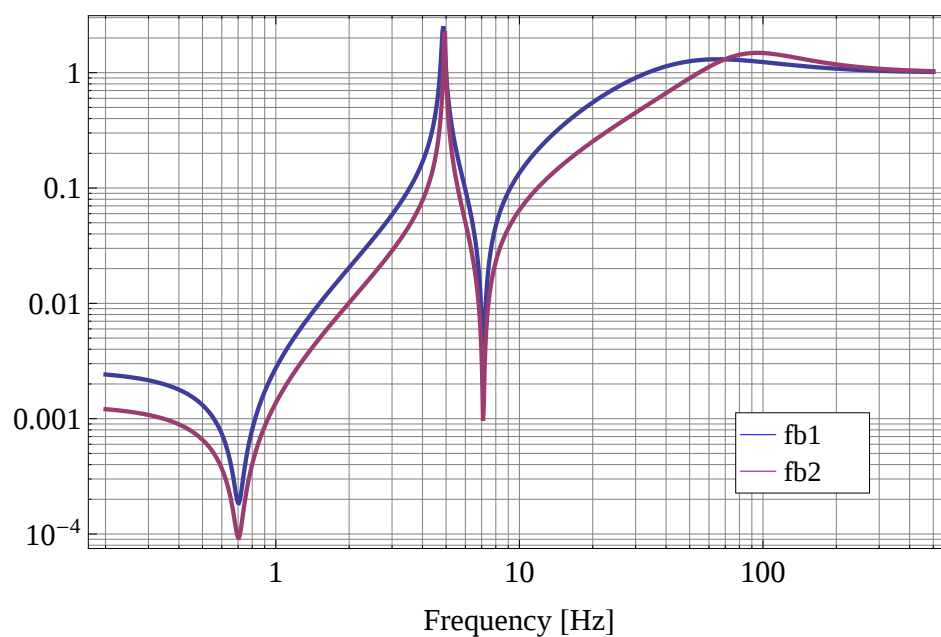


図 8 TF function from s_e to sensor output

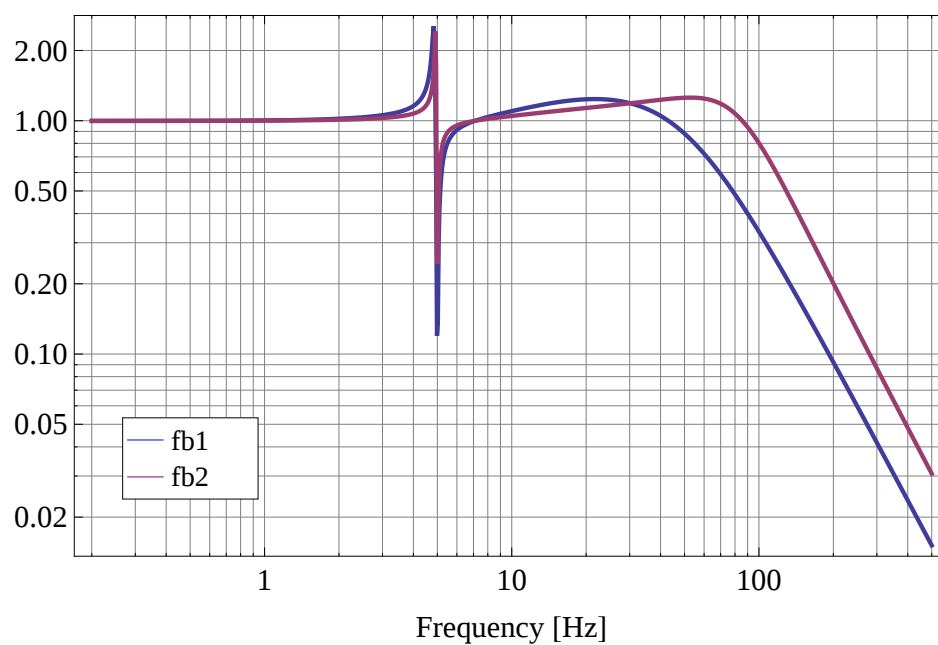
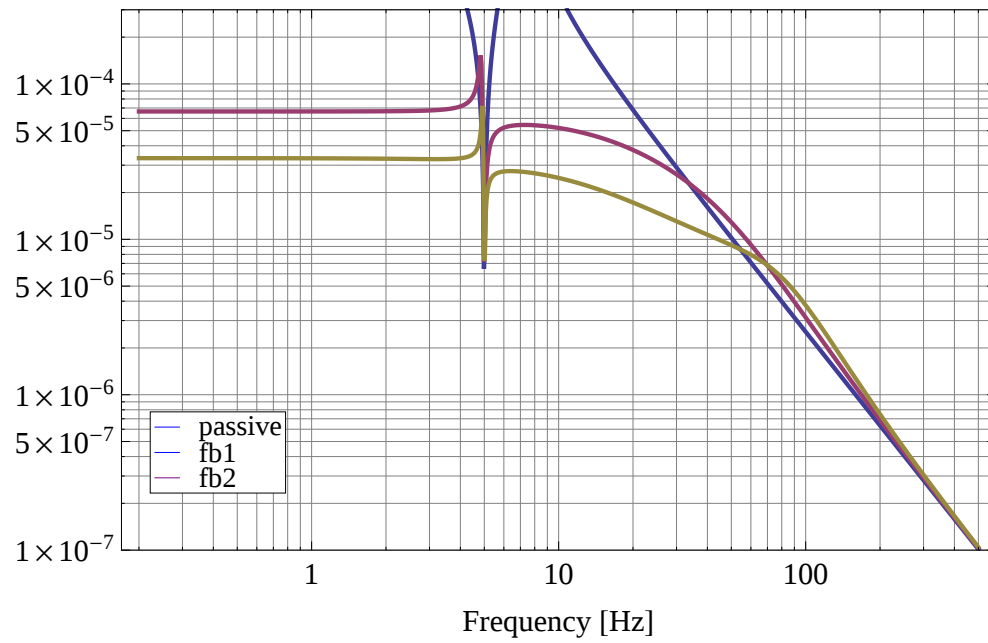


図 9 TF function from s_e to middle mass displacement

0.3.7 TF function from f_e to sensor output

フィードバックゲインの違う 2 つのシステムにおいて、アクチュエータの誤差から中段 mass の出力までの伝達関数を図 10 に示す。open loop gain が 1 より大きい周波数域ではフィードバック制御により伝達関数は小さくなっていて、フィードバックゲインが大きいほうが大きく低減している。open loop gain が 1 より小さい周波数域ではフィードバック制御がかかっていないため、passive system と同じになる。

図 10 TF function from f_e to middle mass displacement