

1 運動方程式

まずは運動方程式を立てる。サスペンションの運動方程式は以下のように表される。

$$M\ddot{\vec{x}} + G\dot{\vec{x}} + K\vec{x} + M_e\ddot{\vec{x}}_e + G_e\dot{\vec{x}}_e + K_e\vec{x}_e = \vec{f} \quad (1.1)$$

ここで、 $\vec{x}$ は各 mass の座標、 $\vec{x}_e$ は地面振動などの環境変数である。以下 M, G, K をそれぞれ mass matrix, damping matrix, stiffness matrix と呼ぶ。系の運動方程式を求めるにはそれぞれの行列を求めればよいことになる。この計算には、LIGO で Mark Barton が開発した Mathematica パッケージを元に関口さんが作成したパッケージを使っている。以下に計算の概略を説明する。

1.1 Energy Calculation

まず、サスペンションのポテンシャルエネルギー E_P 、運動エネルギー E_K 、ダンピングエネルギー E_D を計算する。これらのエネルギーは各 mass の位置と速度の関数となっていて、

$$\begin{aligned} E_P &= E_P(x_1, \dots, x_n) \\ E_K &= E_K(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \\ E_D &= E_D(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2 Equilibrium Point

次に、平衡点を探すために、ポテンシャルエネルギーが極小値を取るような点を求める。その点を平衡点 $\vec{x}_{(eq)}$ とする。

$$\vec{x}_{(eq)} = (x_{1(eq)}, \dots, x_{n(eq)}) \quad (1.3)$$

1.3 Matrix Calculation

各エネルギーを偏微分して各行列を求める。つまり、

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=x_{(eq)}}, M_{ij} = \frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \Big|_{x=x_{(eq)}}, G_{ij} = \frac{\partial^2 E_D}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \Big|_{x=x_{(eq)}} \quad (1.4)$$

同様にして、環境変数についての行列も求める。

$$K_{ej} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial x_i \partial x_{ej}} \Big|_{x=x_{(eq)}}, M_{ij} = \frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_{ej}} \Big|_{x=x_{(eq)}}, G_{ij} = \frac{\partial^2 E_D}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_{ej}} \Big|_{x=x_{(eq)}} \quad (1.5)$$

2 現代制御論

2.1 状態方程式

以上の運動方程式を現代制御論での基礎方程式である状態方程式に焼きなおす。現代制御論は多入力多出力の系を記述するのに有用な理論である。現代制御論で扱うシステムは、直接その値を操作することができる入力と、観測することができる出力を持っていて、その動きがこれらの入出力と、システムの内部の状況を表すいくつかの変数を用いた微分方程式で表せるようなシステムである。状態方程式は、状態を表す変数のベクトルである $\vec{x}$ (状態ベクトル)、入出力を表す変数のベクトル $\vec{u}$ (入力ベクトル)、 $\vec{y}$ (出力ベクトル) を用いて、

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u} \\ \vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u} \end{cases} \quad (2.1)$$

と表される。

このシミュレーションにおいては外乱のあるシステムを考えたいため、状態方程式 (2.1) を外乱を表すベクトル $\vec{w}$ を使って少し変形する。

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B_d\vec{w} + B_i\vec{u} \\ \vec{y} = C\vec{x} + D_d\vec{w} + D_i\vec{u} \end{cases} \quad (2.2)$$

この状態方程式 (2.2) が本シミュレーションの基礎方程式となる。ここで、殆どの場合 D_i は零であるので、以下では無視する。

2.2 伝達関数

状態方程式 (2.2) で表されるシステムの伝達関数を求めることを考える。状態方程式 (2.2) の第一式をラプラス変換して整理すれば

$$\begin{aligned} s\vec{x} &= A\vec{x} + B_d\vec{w} + B_i\vec{u} \\ \therefore \vec{x} &= (sI - A)^{-1}(B_d\vec{w} + B_i\vec{u}) \\ &= (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_d & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

これを第二式に代入すれば

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C(sI - A)^{-1}B_d + D_d & C(sI - A)^{-1}B_i + D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

となる。ここで、

$$K(s) \equiv \begin{pmatrix} C(sI - A)^{-1}B_d + D_d & C(sI - A)^{-1}B_i + D_i \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

とすると、 $K(i\omega)$ を伝達関数行列と呼ぶことができる。この伝達関数行列は入力や外乱から出力までの伝達関数を行列にしたものである。

2.3 システムの連結

ここで、別の状態方程式で表される 2 つのシステムの連結、つまり 1 つ目のシステムの出力を、2 つ目のシステムの入力とするようなシステムを作ることを考える。図 (??) にこのシステムのブロック線図を書く。2 つのシステムを表す状態方程式を

$$P_k \begin{cases} \dot{\vec{x}}_k = A_k \vec{x}_k + B_{d,k} \vec{w}_k + B_{in,k} \vec{u}_k \\ \vec{y}_k = C_k \vec{x}_k + D_{d,k} \vec{w}_k + D_{in,k} \vec{u}_k \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (2.6)$$

とする。\$\vec{u}_2 = \vec{y}_1\$ を代入して

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_2 &= B_{in,2} C_1 \vec{x}_1 + A_2 \vec{x}_2 + B_{in,2} D_{d,1} \vec{w}_1 + B_{d,2} \vec{w}_2 \\ \vec{y}_2 &= D_{in,2} C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 + D_{in,2} D_{d,1} \vec{w}_1 + D_{d,2} \vec{w}_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる、したがって連結されたシステムの状態方程式は、状態ベクトルを \$\vec{x}_{P_1+P_2} = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2)^T\$ とすれば書くことができ

$$(P_1 + P_2) \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}}_1 \\ \dot{\vec{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ B_{i,2} C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{d,1} & O \\ B_{i,2} D_{d,1} & B_{d,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{i,1} \\ O \end{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{y}_2 = (D_{in,2} C_1 \ C_2) \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} + (D_{in,2} D_{d,1} \ D_{d,2}) \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.8)$$

これを更に書きなおして

$$P_1 + P_2 \begin{cases} \dot{\vec{x}}_{P_1+P_2} = A_{P_1+P_2} \vec{x}_{P_1+P_2} + B_{d,P_1+P_2} \vec{w} + B_{i,P_1+P_2} \vec{u}_{P_1+P_2} \\ \vec{y}_{P_1+P_2} = C_{P_1+P_2} \vec{x}_{P_1+P_2} + D_{d,P_1+P_2} \vec{w} \end{cases} \quad (2.9)$$

2.4 フィードバック

次に、フィードバックシステムが状態方程式においてどのように表わされるかを見ていく。状態方程式 (2.2) で表されるシステムのフィードバックを考える。システムの出力からシステムへの入力までのフィルタ伝達関数行列を \$H(s)\$ とすると、周波数空間において

$$\vec{u} = H(s) \vec{y} \quad (2.10)$$

となる。次にこのような伝達関数行列を持つシステム \$H\$ を考えるのだが、このように伝達関数行列からシステムの状態方程式を求めるような問題を実現問題と呼ぶ。この実現問題は割と簡単に解けるが、詳細は割愛する。Mathematica では、実現問題を解いてくれる関数が存在しているため、実際の計算ではその関数を使っている。さて、フィードバックフィルタが以下の様な状態方程式で表されるとする。

$$H \begin{cases} \dot{\vec{\xi}} = A_H \vec{\xi} + B_H \vec{y} \\ \vec{u} = C_H \vec{\xi} + D_H \vec{y} \end{cases} \quad (2.11)$$

状態方程式 (2.2) とフィルタの状態方程式 (2.11) より、\$\vec{y}\$ を式 (2.11) に代入することで、

$$\vec{u} = (I - D_H)^{-1} (D_H C \vec{x} + C_F \vec{\xi}) \quad (2.12)$$

を得るので

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= (A + B_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H C) \vec{x} + B_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} C_H \vec{\xi} \\ &\quad + (B_d + B_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H D_d) \vec{w} \\ \dot{\vec{\xi}} &= B_H(I + D(I - D_H D_{in})^{-1} D_H) C \vec{x} + (A_H + B_H D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} C_H) \vec{\xi} \\ &\quad + B_H(I + D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H) D_d \vec{w}\end{aligned}\quad (2.13)$$

となる。以上より、フィードバックシステム FB 全体の状態方程式は

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \dot{\vec{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H C & B_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} C_H \\ B_H(I + D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H) C & A_H + B_H D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} C_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} \\ \quad + \begin{pmatrix} B_d + B_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H D_d \\ B_H(I + D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H) D_d \end{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{y} = ((I + D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H) C \quad D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} C_H) \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} \\ \quad + (I + D_{in}(I - D_H D_{in})^{-1} D_H) D_d \vec{w} \end{cases}\quad (2.14)$$

これを更には書きなおして

$$FB \quad \begin{cases} \dot{\vec{x}}_{FB} = A_{FB} \vec{x}_{FB} + B_{d,FB} \vec{w} \\ \vec{y}_{FB} = C_{FB} \vec{x}_{FB} + D_{d,FB} \vec{w} \end{cases}\quad (2.15)$$

2.5 フィードバックシステムの安定性

フィードバックシステムの安定性は各伝達関数の極の実部で判別できる。フィードバックシステムにおける伝達関数行列は式 (2.5) においてそれぞれの行列を式 (2.15) 中の行列に置き換えたものである。式 (2.5) を見れば分かるように、伝達関数の極に関わってくるのは $(sI - A_{fb})^{-1}$ の部分だけであり、言い換えるとシステムの安定性には A_{fb} しか関わってこない。実際、システムの極は $\det |sI - A| = 0$ の解、すなわち A_{fb} の固有値である。したがって、システムの安定性は A_{fb} の固有値を調べれば判別できる。

2.6 サスペンションにおける状態方程式

2.6.1 サスペンション

さて、具体的にサスペンションシステムで状態方程式を立ててみる。まずはサスペンションのみのシステムを考える。つまり、センサーについては何も考えず、仮想的に mass の位置 $\vec{x}$ と速度 $\dot{\vec{x}}$ 、環境変数 $\vec{x}_e, \dot{\vec{x}}_e, \ddot{\vec{x}}_e$ が分かるようなシステムとする。運動方程式 (1.1) を見れば、

$$\ddot{\vec{x}} = -M^{-1} G \dot{\vec{x}} - M^{-1} K \vec{x} - M^{-1} M_e \ddot{\vec{x}}_e - M^{-1} G_e \dot{\vec{x}}_e - M^{-1} K_e \vec{x}_e + M^{-1} F(\vec{u} + \vec{e}_a) \quad (2.16)$$

となる。また、力を表すベクトル $\vec{f}$ は、何かしらの入力から力へ変換させる actuator matrix F を定義し、さらにその入力には回路起因などのノイズ $\vec{e}_a = (e_{a,1} \ \dots \ e_{a,n_a})$ (ただし、 $e_{a,i}$ は各入力に乘るノイズであり、 n_a はアクチュエータの数) が乗ると考えて $F(\vec{u} + \vec{e}_a)$ と書き換えている。

状態ベクトルを $\vec{x}_p = (\vec{x} \ \dot{\vec{x}})^T$ 、外乱ベクトルを $\vec{w}_p = (\vec{x}_e \ \dot{\vec{x}}_e \ \ddot{\vec{x}}_e)^T$ とする。また、この仮想システムにおいて出力は $\vec{y}_p = (\vec{x}_p \ \vec{w}_p)$ であることに注意すると

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \dot{\vec{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \dot{\vec{x}} \end{pmatrix} \\ \quad + \begin{pmatrix} O & O & O \\ -M^{-1}K_e & -M^{-1}G_e & -M^{-1}M_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_e \\ \dot{\vec{x}}_e \\ \ddot{\vec{x}}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ -M^{-1}F \end{pmatrix} \vec{e}_a + \begin{pmatrix} O \\ -M^{-1}F \end{pmatrix} \vec{u} \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_p \\ \vec{w}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix} \vec{x}_P + \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix} \vec{w}_p \end{cases} \quad (2.17)$$

ただし、 I, O はそれぞれ単位行列とゼロ行列である。これらがサスペンションの状態方程式であり、以下のように書きなおす

$$P \quad \begin{cases} \dot{\vec{x}}_p = A_p \vec{x}_p + B_{d,p} \vec{w}_p + B_{d,a} \vec{w}_a + B_{in,p} \vec{u} \\ \vec{y}_p = C_p \vec{x}_p + D_{d,p} \vec{w}_p \end{cases} \quad (2.18)$$

2.6.2 センサー

次にセンサーについて考える。今センサーとしては KVDT のような相対変位センサー、GEOPHONE のような速度センサーを想定している。これらのセンサーはそれぞれ、sense する mass の速度や地面と mass の変位差などに対して伝達関数 (感度曲線) を持つ。この伝達関数を $S(i\omega)$ とすると、センサーの出力を $\vec{y}_s$ として

$$\vec{y}_s = H_s(i\omega) \vec{y}_P \quad (2.19)$$

と書ける。そのため、センサー自体も $\vec{y}_p$ を入力、 $\vec{y}_s$ を出力とする 1 つのプラントだと考えることができる。この伝達関数からセンサーの状態方程式を求めて以下の様を書く

$$S \quad \begin{cases} \dot{\vec{\xi}}_s = A_s \vec{\xi}_s + B_{in,s} \vec{y}_p \\ \vec{y}_s = C_s \vec{\xi}_s + D_{in,s} \vec{y}_p \end{cases} \quad (2.20)$$

さらに、ここでセンサーノイズについても考えてみる。ノイズは外乱であると考えられるため、各センサーが持つノイズ $\vec{e}_s = (e_{s,1} \ \dots \ e_{s,n_s})$ をアクチュエータの時と同じように定義すれば、外乱ベクトルを $\vec{w}_s = \vec{e}_s$ とおける。センサーの状態方程式 (2.21) は $D_{d,s} = I$ (単位行列) として

$$S \quad \begin{cases} \dot{\vec{\xi}}_s = A_s \vec{\xi}_s + B_{in,s} \vec{y}_p \\ \vec{y}_s = C_s \vec{\xi}_s + D_{d,s} \vec{w}_s + D_{in,s} \vec{y}_p \end{cases} \quad (2.21)$$

と書き直せる。ここで、センサーの状態方程式における状態ベクトル $\vec{\xi}$ の物理的意味だが、センサー内部の物理状態を表す変数であると考えられる。

次に、以上 2 つのシステムを接続する。上でやった計算よりセンサー付きサスペンションの状態方

程式は

$$P + S \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}}_p \\ \dot{\vec{\xi}}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p & O \\ B_{in,s}C_p & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_p \\ \vec{\xi}_s \end{pmatrix} \\ \quad + \begin{pmatrix} B_{d,p} & B_{d,a} & O \\ B_{in,s}D_{d,p} & B_{in,s}D_{d,a} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_p \\ \vec{w}_a \\ \vec{w}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{in,p} \\ O \end{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{y}_s = (D_{in,s}C_p \quad C_s) \begin{pmatrix} \vec{x}_p \\ \vec{\xi}_s \end{pmatrix} + (D_{in,s}D_{d,p} \quad O \quad D_{d,s}) \begin{pmatrix} \vec{w}_p \\ \vec{w}_a \\ \vec{w}_s \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

例のごとく書きなおせば

$$P + S \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}}_{p+s} = A_{p+s}\vec{x}_{p+s} + B_{d,p+s}\vec{w}_{p+s} + B_{in,p+s}\vec{u} \\ \vec{y}_s = C_{p+s}\vec{x}_{p+s} + D_{d,p+s}\vec{w}_{p+s} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

2.6.3 フィードバックシステム

最後にフィードバックを行う。フィルタの状態方程式を

$$H \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{\xi}}_h = A_h\vec{\xi}_h + B_h\vec{y}_s \\ \vec{u} = C_h\vec{\xi}_h + D_h\vec{y}_s \end{array} \right. \quad (2.24)$$

とすれば、先の計算から

$$FB \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}}_{p+s} \\ \dot{\vec{\xi}}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{p+s} + B_{in,p+s}D_hC_{p+s} & B_{in,p+s}C_h \\ B_hC_{p+s} & A_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_{p+s} \\ \vec{\xi}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{d,p+s} + B_{in,p+s}D_hD_{d,p+s} \\ B_hD_{d,p+s} \end{pmatrix} \vec{w}_{p+s} \\ \vec{y}_s = (C_{p+s} \quad O) \begin{pmatrix} \vec{x}_{p+s} \\ \vec{\xi}_h \end{pmatrix} + D_{d,p+s}\vec{w}_{p+s} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

ここで、このシステムでは、各外乱からセンサー出力までの伝達関数しか求めることができないため、式 (2.25) 第式を少し変形して、

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_s \\ \vec{x}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{in,s}C_p & C_s & O \\ I & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_p \\ \vec{\xi}_s \\ \vec{\xi}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{in,s}D_{d,p} & O & D_{d,s} \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_p \\ \vec{w}_a \\ \vec{w}_s \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

これらをまとめて、

$$FB \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}}_{fb} = A_{fb}\vec{x}_{fb} + B_{d,fb}\vec{w}_{fb} \\ \vec{y}_{fb} = C_{fb}\vec{x}_{fb} + D_{d,fb}\vec{w}_{fb} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

また、確認のためにベクトルを書き下したものが以下のものである。

$$\begin{aligned} \vec{x}_{fb} &= \begin{pmatrix} \vec{x} & \dot{\vec{x}} & \vec{\xi}_s & \vec{\xi}_h \end{pmatrix}^T \\ \vec{w}_{fb} &= \begin{pmatrix} \vec{x}_e & \dot{\vec{x}}_e & \ddot{\vec{x}}_e & \vec{e}_a & \vec{e}_s \end{pmatrix}^T \\ \vec{y}_{fb} &= \begin{pmatrix} \vec{y}_s & \vec{x} & \dot{\vec{x}} \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.6.4 伝達関数行列

最後にこれらの行列から伝達関数行列を求めておく。

$$K_{fb}(s) \equiv C_{fb}(sI - A_{fb})^{-1}(B_{d,fb} + D_{d,fb}) \quad (2.29)$$

3 具体例

3.1 一段振り子

以上の計算を実際のシステムで考えていく。これから考えるのは最もシンプルな一段振り子モデル。地面から伸縮のないワイヤーで釣られた質量 m 質点の運動を考える。 x が質点の変位、 x_g が地面の動きとする。また、actuator は mass についていてその出力を u_a とし、actuator noise を e_a とする。また、出力から力までのゲインは 1 とする。つまり実際に物体にかかる力は $u_a + e_a$ となる。センサーは地面と mass の相対変位を読み出すものと考え、センサーのノイズを e_s とする。さらに、mass には地面と接続したダンパーが付いているとする。フィードバックに使うフィルタの伝達関数は

$$K(s) = \frac{G(s + w_1)}{s + w_2} \quad (3.1)$$

とする。以上が今から考えるモデルである。

3.1.1 通常の計算

まずは以上のようなモデルの伝達関数を手計算で求める。運動方程式は

$$m\ddot{x} + u_a + e_a = -m\frac{g}{l}(x - x_g) - m\gamma(\dot{x} - \dot{x}_g) \quad (3.2)$$

簡単のため $m = 1$ とすると、これから求まる x_g, f から x への伝達関数行列 $P(s)$ は、 $x = P(s)(x_g \ u_a \ e_a)$ として周波数領域で

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2} \begin{pmatrix} \gamma s + \omega_0^2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

次にフィードバックシステムを考える。周波数空間で $u_a = -K(s)\{(x - x_g) + e_s\}$ より、運動方程式に代入すれば、

$$s^2x - K(s)\{(x - x_g) + e_s\} + e_a = -\omega_0^2(x - x_g) - \gamma s(x - x_g) \quad (3.4)$$

フィードバックシステムの伝達関数行列 $P_{fb}(s)$ は、 $x = P_{fb}(s)(x_g \ e_a \ e_s)$ として

$$\begin{aligned} P_{fb}(s) &= \frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2 - K(s)} \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \gamma s - K(s) & -1 & K(s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 + (\gamma + \omega_2)s^2 + (\gamma\omega_2 + \omega_0^2 - G)s + \omega_2\omega_0^2 - G\omega_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\times \begin{pmatrix} \gamma s^2 + (\gamma\omega_2 + \omega_0^2 - G)s + \omega_0^2\omega_2 - G\omega_1 & G(s + \omega_1) & G(s + \omega_1) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.1.2 状態方程式を利用した計算

次に前章で説明した方法で計算してみる。mass matrix などは運動方程式より

$$M = 1, G = \gamma, K = \omega_0^2, M_e = 0, G_e = -\gamma, K_e = -\omega_0^2 \quad (3.7)$$

したがって、式 (2.18) におけるそれぞれのベクトルや行列は、

$$\begin{aligned} \vec{x}_p &= (x \ \dot{x})^T, \quad \vec{w}_p = (x_g \ \dot{x}_g \ \ddot{x}_g)^T, \quad \vec{w}_a = (e_a), \quad \vec{u} = (u_a), \quad \vec{y}_p = (x \ \dot{x} \ x_g \ \dot{x}_g \ \ddot{x}_g \ u_a)^T \\ A_p &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad B_{d,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega_0^2 & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{d,a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B_{in,p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ C_p &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{d,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

さて、ここまででサスペンションシステムの状態方程式が求められたので、一度伝達関数行列を計算してみる。

$$\begin{aligned} \vec{y}_p &= \{C_p(sI - A_p)^{-1}(B_{d,p} \ B_{d,a} \ B_{d,in}) + (D_{d,p} \ D_{d,a} \ O)\} \begin{pmatrix} \vec{w}_p \\ \vec{w}_a \\ \vec{u} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ x_g \\ \dot{x}_g \\ \ddot{x}_g \end{pmatrix} &= \frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2} \begin{pmatrix} \omega_0^2 & \gamma & 0 & -1 & -1 \\ s\omega_0^2 & s\gamma & 0 & -s & -s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \\ \ddot{x}_g \\ e_a \\ u_a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

式 (3.3) の伝達関数と比べると、地面振動からの伝達関数について少し気をつける必要があることが分かる。つまり、この方法では地面の速度と位置が別の変数として認識されているのである。したがって、実際に伝達関数を求める際には速度からの伝達関数に s を掛けたものを位置からの伝達関数に足してあげる必要がある。

次に、センサーについて考える。今、 $y_s = x - x_g$ なので、式 (2.19) における伝達関数は

$$H_s(s) = (1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0) \quad (3.10)$$

となる。これを状態方程式に直すことを考えたいが伝達関数を見れば分かるように、 $D_{in,s} = (1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0)$, $D_{d,s} = 1$ とし、状態ベクトルが存在しないようなシステムである。したがって、接続されたシステムの状態方程式は

$$C_{p+s} = (1 \ 0), \quad D_{p+s} = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \quad (3.11)$$

とし、他の行列は式 (3.8) のままである。

最後にフィードバックシステムを考える。フィルタ伝達関数 (3.1) を持つシステムの状態方程式を求めると、

$$A_h = -\omega_2, \quad B_h = 1, \quad C_h = G(\omega_1 - \omega_2) \quad D_h = G \quad (3.12)$$

となる。したがって、フィードバックシステムの行列はそれぞれ

$$\begin{aligned} A_{fb} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -G - \omega_0^2 & -\gamma & -G(\omega_1 - \omega_2) \\ 1 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}, \quad B_{fb} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0^2 & \gamma & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ C_{fb} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{fb} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

これらの行列から伝達関数行列が求まるが、ここでは割愛する。正しい結果を出すことだけ記しておく。