

Geometric control theory for quantum back-action evasion

横寺 裕
慶應義塾大学

第86回 重力波研究交流会
2017年4月28日(金) 東京工業大学

概要

1. 研究背景・目的

- システム制御の考え方
- 信号検出問題

2. 幾何学的制御

3. 結果

- 量子外乱分離の一般構造
- オプトメカニクス系での設計例

4. まとめ

概要

1. 研究背景・目的

- システム制御の考え方
- 信号検出問題

2. 幾何学的制御

3. 結果

- 量子外乱分離の一般構造
- オプトメカニクス系での設計例

4. まとめ

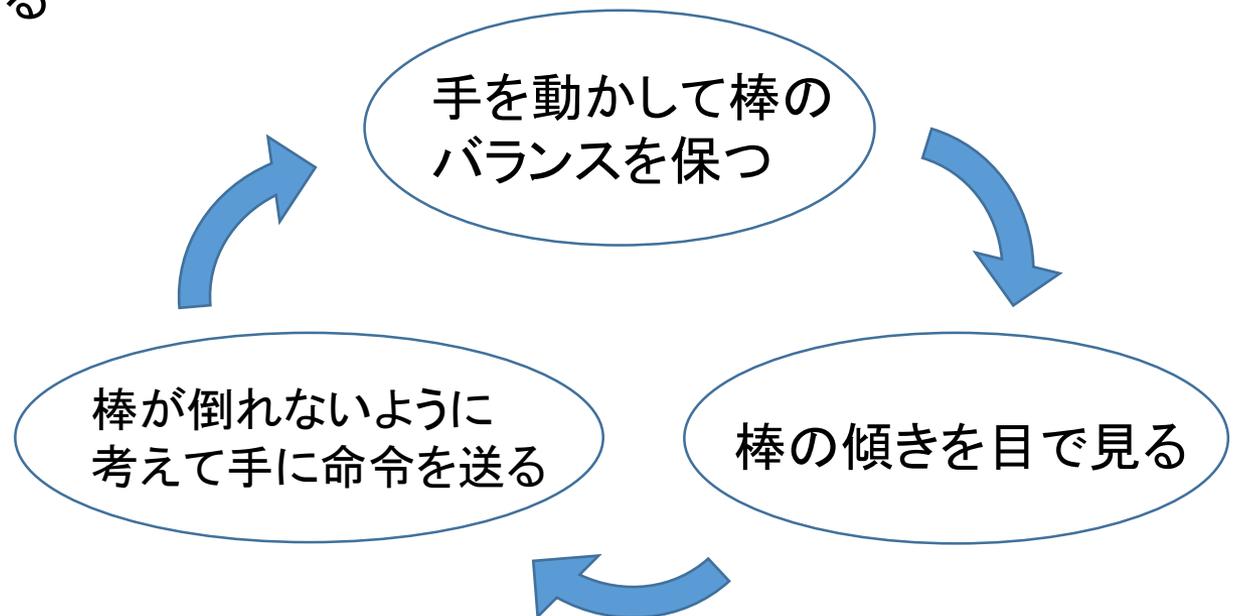
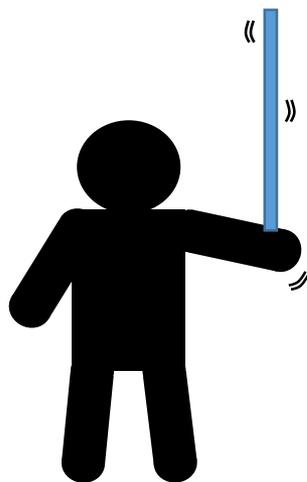
システム制御の考え方

制御の目的

対象系が我々の目標とする振る舞いをするように、対象物に操作を加えること。

➡ その基礎となるのが「**フィードバック制御**」

例) 手の上で棒を立てる

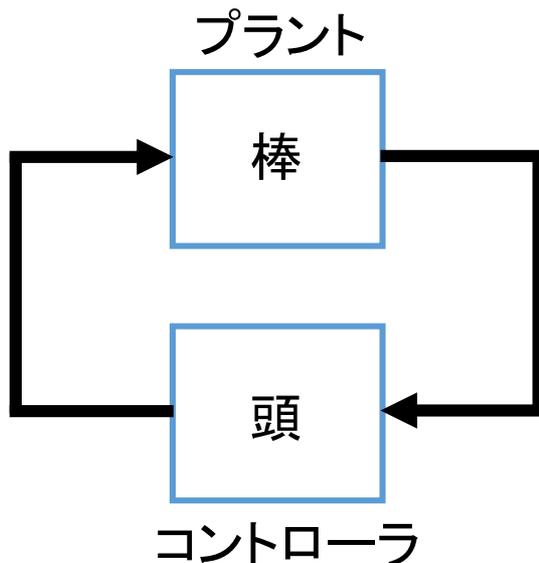


システム制御の考え方

制御の応用例

- ・ ロボットの姿勢制御
- ・ 航空機の自動操縦
- ・ 部屋の空調管理
- ・ オペアンプの特性改善 ...etc.

➡ 制御理論は対象系を限定しない**横断的な**設計理論



フィードバック制御とは

対象系(プラント)に別の系(コントローラ)を接続し、これらを合わせた全体系が目標通りに振る舞うようにする

システム制御の考え方

システムの表現

入出力のあるシステム, 特に線形システムに対する理論体系が出来上がっている



行列 (A, B, C, D) によってシステムが特徴付けられる

周波数領域での解析も容易 (上の2式をラプラス変換)

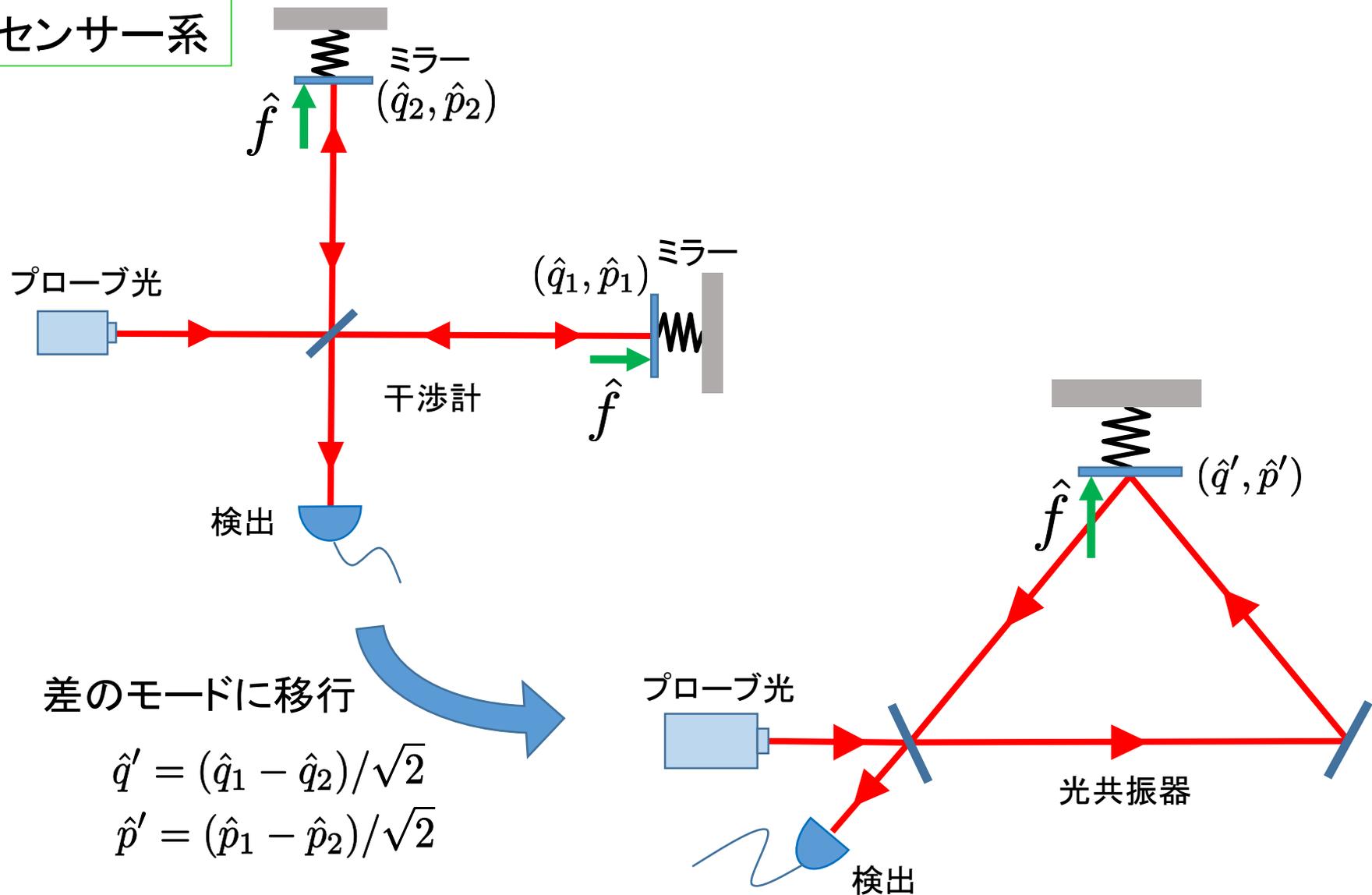
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\text{伝達関数} : G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

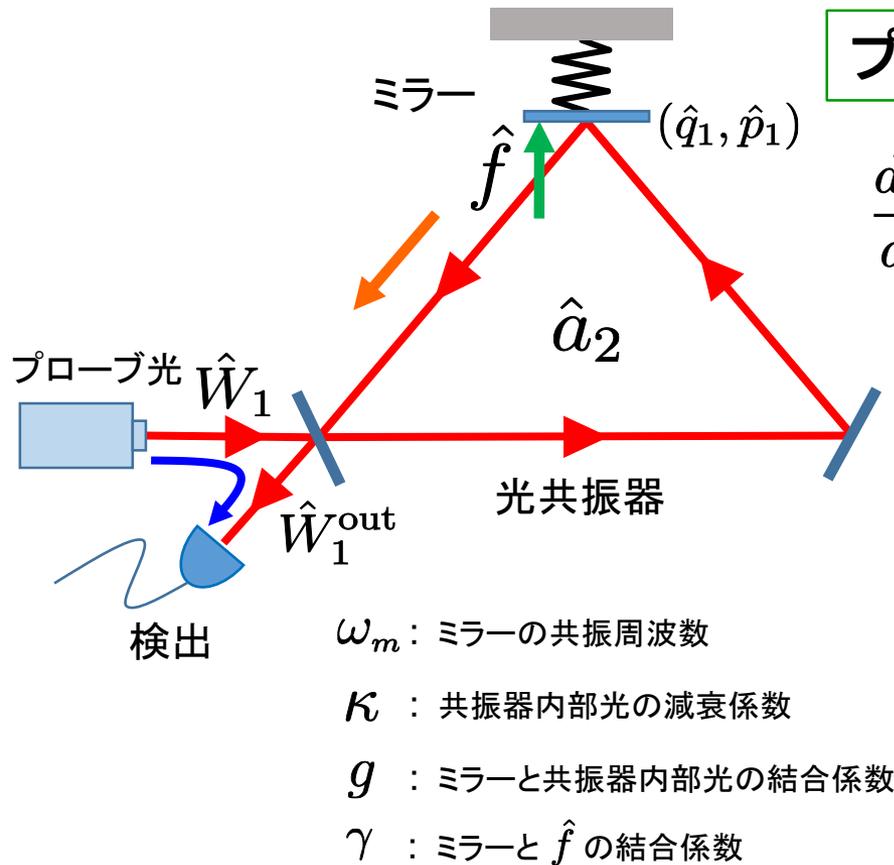
周波数領域での入出力間の応答を表す

オプトメカニクス系を用いた微弱信号検出

センサー系



オプトメカニクス系を用いた微弱信号検出



プラント

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + B\hat{W}_1 + b\hat{f} \quad \hat{W}_1^{\text{out}} = C\hat{x} + \hat{W}_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_m & 0 & 0 \\ -\omega_m & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa/2 & 0 \\ g & 0 & 0 & -\kappa/2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = -B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\kappa} \end{bmatrix}$$

$$\hat{W}_1 = [\hat{Q}_1, \hat{P}_1]^T \quad \hat{W}_1^{\text{out}} = [\hat{Q}_1^{\text{out}}, \hat{P}_1^{\text{out}}]^T$$

$$\hat{x} = [\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2]^T$$

これを測定する

周波数領域での入出力関係

$$\hat{P}_1^{\text{out}}(s) = \Xi_f(s)\hat{f}(s) + \Xi_Q(s)\hat{Q}_1(s) + \Xi_P(s)\hat{P}_1(s)$$

測定出力

信号

輻射圧雑音

ショット雑音

標準量子限界 (SQL)

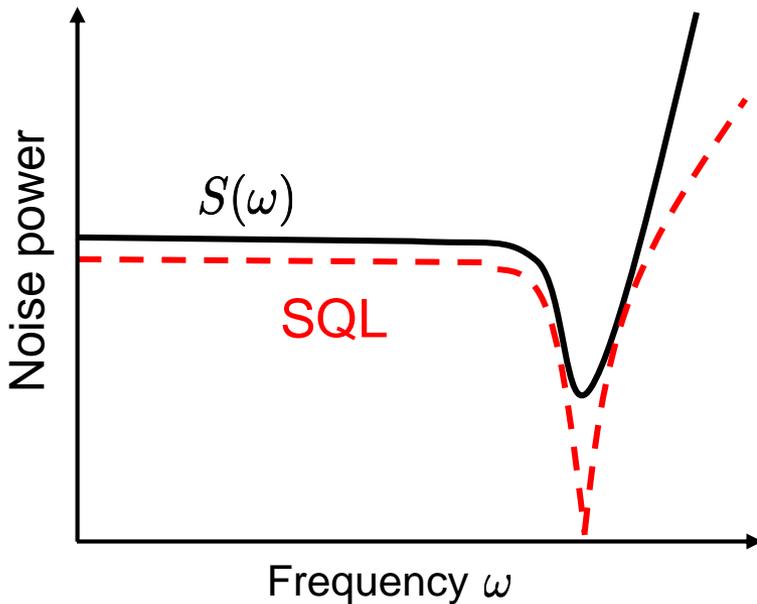
$$\hat{P}_1^{\text{out}}(s) = \underbrace{\Xi_f(s)\hat{f}(s)}_{\text{信号}} + \underbrace{\Xi_Q(s)\hat{Q}_1(s)}_{\text{輻射圧雑音}} + \underbrace{\Xi_P(s)\hat{P}_1(s)}_{\text{ショット雑音}}$$

測定出力

信号

輻射圧雑音

ショット雑音



ノイズのパワースペクトル

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \langle |\hat{P}_1^{\text{out}}(\omega)/\Xi_f(\omega) - \hat{f}(\omega)|^2 \rangle \\ &= \left| \frac{\Xi_Q}{\Xi_f} \right|^2 \langle |\hat{Q}_1|^2 \rangle + \left| \frac{\Xi_P}{\Xi_f} \right|^2 \langle |\hat{P}_1|^2 \rangle \\ &\geq \frac{|\omega^2 - \omega_m^2|}{\gamma\omega_m} \end{aligned}$$

標準量子限界

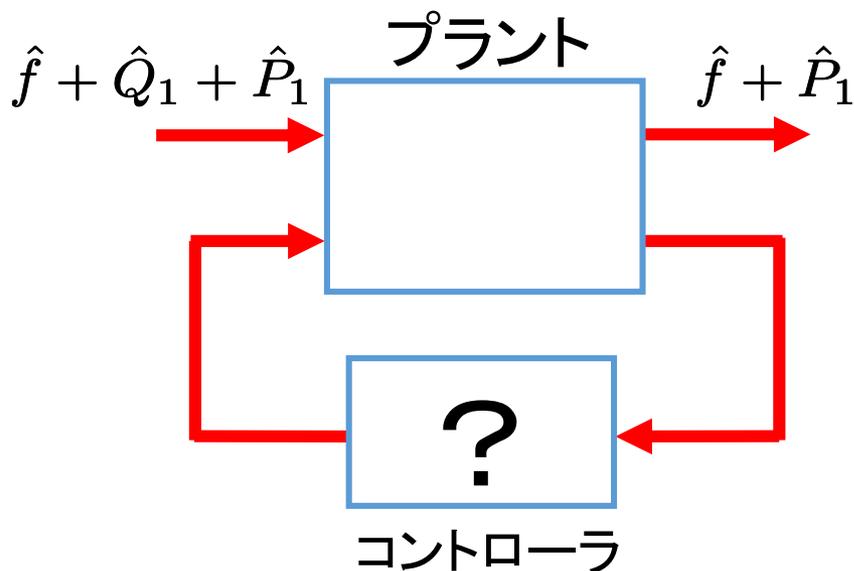
(Standard Quantum Limit, SQL)

標準量子限界が現れる理由

- ・ 測定出力が輻射圧雑音とショット雑音の両方を含んでいる。
- ・ \hat{Q}_1 と \hat{P}_1 の間に不確定性関係 $\langle |\hat{Q}_1|^2 \rangle \langle |\hat{P}_1|^2 \rangle \geq 1/4$ がある。

Back-action evasion (BAE)

$$\hat{P}_1^{\text{out}}(s) = \Xi_f(s)\hat{f}(s) + \Xi_Q(s)\hat{Q}_1(s) + \Xi_P(s)\hat{P}_1(s)$$



Back-action evasion (BAE)

輻射圧雑音が出力に現れない
ようにする設計問題

$$\Xi_Q(s) = 0, \forall s$$

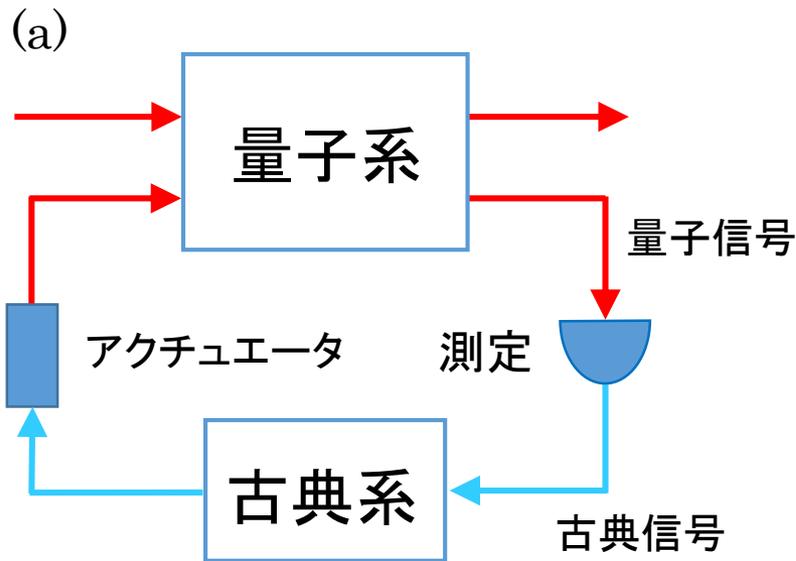
BAE達成後は \hat{P}_1 方向のスクイズド光を
入力し、更なるS/N比向上を図る

Q. BAEを達成するコントローラの構造はどのように与えられるか？

BAEを達成するコントローラの**一般的設計法**を
システム制御の視点から提案する

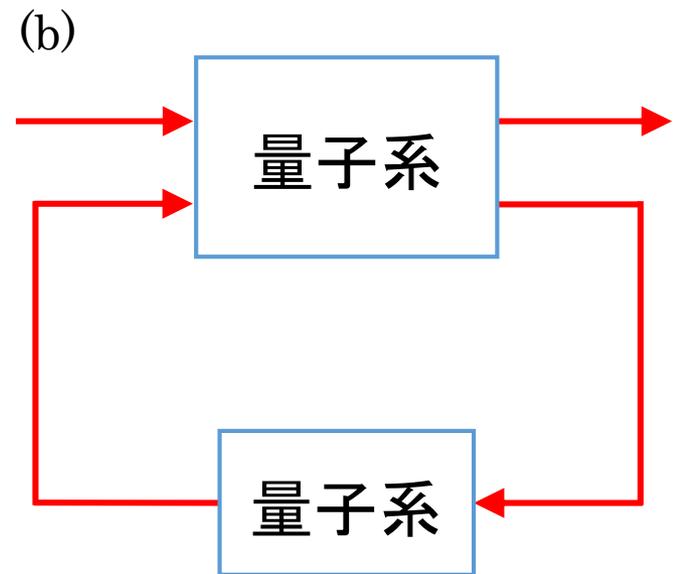
➡ A. 幾何学的制御 (Geometric control)

フィードバック制御の種類



(a) 測定フィードバック

プラントからの出力の測定結果に基づいてコントローラ(古典系)がアクチュエータに信号を送り、制御入力をプラントに返す。



(b) コヒーレントフィードバック

プラントからの出力を測定せず、コントローラ(量子系)が量子的な操作を施し、制御入力をプラントに返す。

測定フィードバックではBAEを達成できないことがわかっている。

➡ コヒーレントフィードバックによる設計を考える。

概要

1. 研究背景・目的

- システム制御の考え方
- 信号検出問題

2. 幾何学的制御

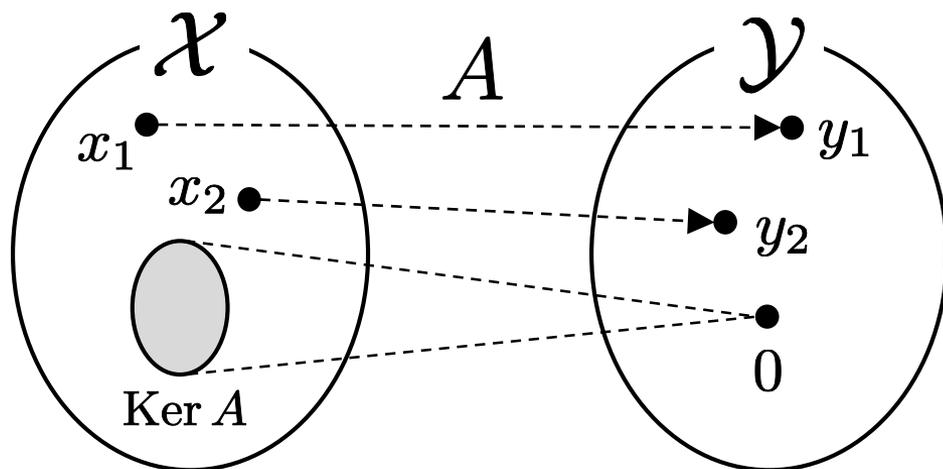
3. 結果

- 量子外乱分離の一般構造
- オプトメカニクス系での設計例

4. まとめ

幾何学的制御 (Geometric control)

線形システムの特性を**部分空間**の相互関係から
考察する手法



- 零空間, 核 (kernel)

$$\text{Ker } A = \{x \in \mathcal{X} \mid Ax = 0\}$$

➡ A を作用させると零になる \mathcal{X} の空間

- 値域, 像 (image)

$$\text{Im } A = \{y \in \mathcal{Y} \mid y = Ax, \forall x\}$$

➡ A を作用して写った先の空間全体 \mathcal{Y}

不変部分空間 (Invariant subspaces)

- A 不変

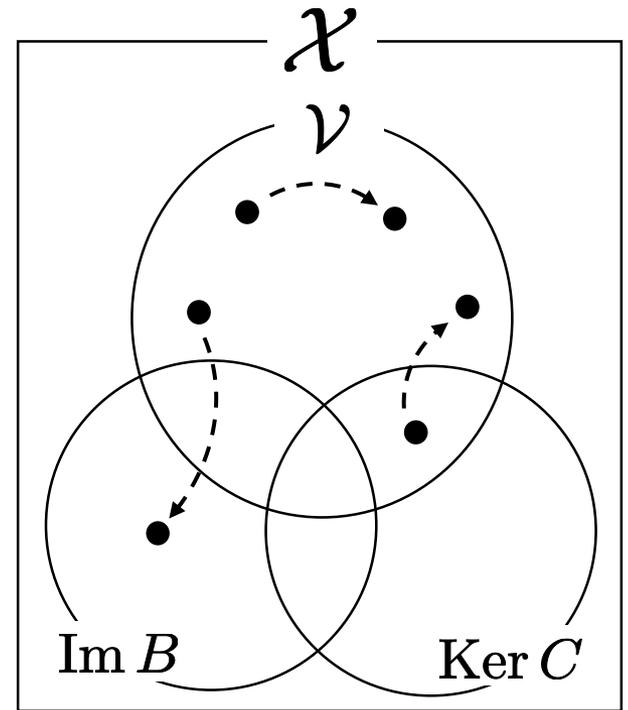
$$A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$$

- (C, A) 不変

$$A(\mathcal{V}_1 \cap \text{Ker } C) \subseteq \mathcal{V}_1$$

- (A, B) 不変

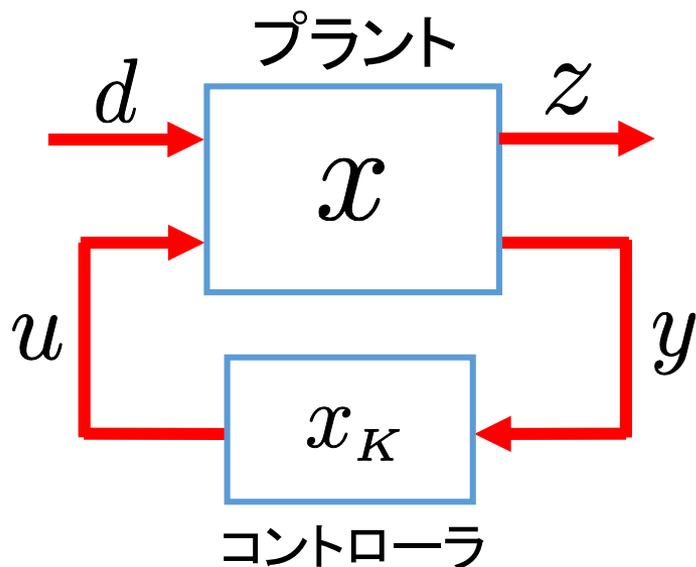
$$A\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_2 \oplus \text{Im } B$$



\mathcal{V}_1 が (C, A) 不変, \mathcal{V}_2 が (A, B) 不変で, $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ が成り立つとき, $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ を (C, A, B) ペアと呼ぶ.

上記の不変部分空間は与えられた**プラントの構造**から定まる

フィードバック制御の構成



プラント

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad z(t) = Hx(t)$$

コントローラ

$$\frac{dx_K(t)}{dt} = A_K x_K(t) + B_K y(t)$$

$$u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t)$$

d : 外乱 y : 測定出力
 u : 制御入力 z : 評価出力



閉ループ系

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} d$$

$$z = \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$

プラントとコントローラを合わせた拡大系の状態方程式と出力方程式が得られた。

幾何学的制御による外乱分離

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} d \quad z = \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$

制御目標

外乱 d が評価出力 z に現れないように (A_K, B_K, C_K, D_K) を設計する

→ Q. (A_K, B_K, C_K, D_K) をどのように設計すればよいか？

定理1 (可解条件)

上記の閉ループ系において、以下の包含関係を満たすような (C, A, B) ペア $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ が存在すれば、外乱分離可能。

$$\text{Im } E \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \text{Ker } H$$

上記の可解条件は、

- ・ 設計する**コントローラに依存せず**、プラントのみで決まる。
- ・ **線形代数**を用いてチェックできる。

幾何学的制御による外乱分離

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} d \quad z = \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$

定理2 (コントローラのパラメトリゼーション)

以下の条件を満たす行列(A_K, B_K, C_K)で特徴付けられるフィードバックコントローラによって外乱分離は達成される.

$$\begin{cases} \underline{A_K} = N(A + BF + GC - BD_K C)N^+ \\ \underline{B_K} = -N(G - BD_K) \\ \underline{C_K} = (F - D_K C)N^+ \end{cases}$$

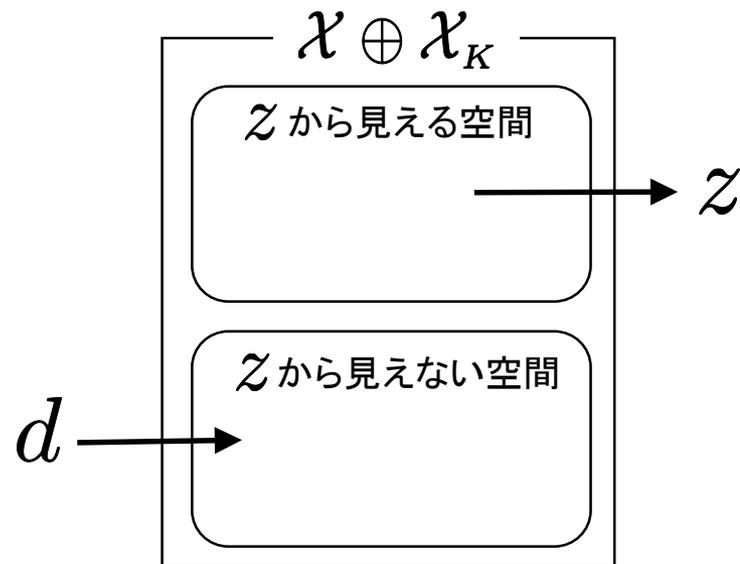
$$\text{Ker}(F - D_K C) \supseteq \mathcal{V}_1 \quad \text{Im}(G - BD_K) \subseteq \mathcal{V}_2$$

$$\text{Ker } N = \mathcal{V}_1 \quad (N : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{X}_K) \quad NN^+ = I$$

$$\dim \mathcal{X}_K = \dim \mathcal{V}_2 - \dim \mathcal{V}_1$$

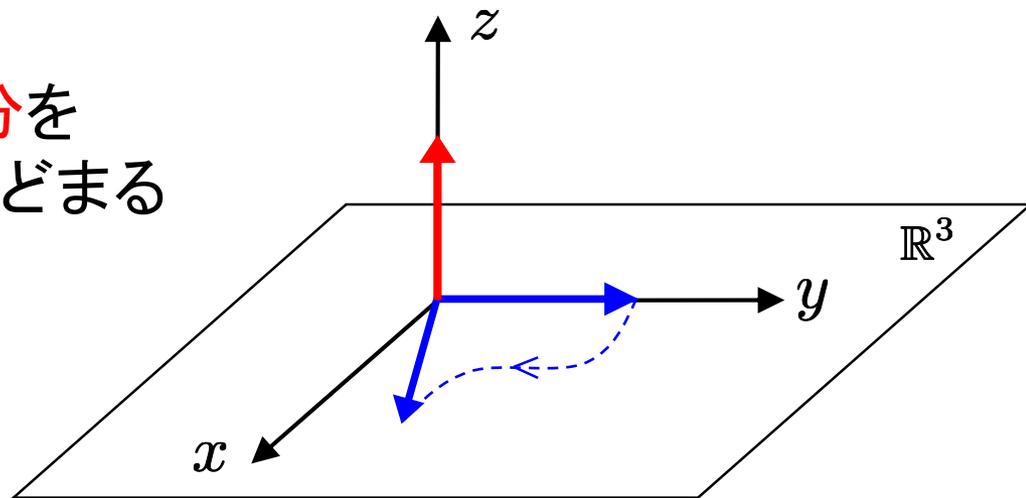
幾何学的制御の直観的理解

外乱 d が常に評価出力 z から見えない空間に閉じ込められていれば, 外乱分離が達成される



例)

外乱ベクトルが z 方向成分を持つことなく xy 平面上にとどまるように制御する



概要

1. 研究背景・目的

- システム制御の考え方
- 信号検出問題

2. 幾何学的制御

3. 結果

- 量子外乱分離の一般構造
- オプトメカニクス系での設計例

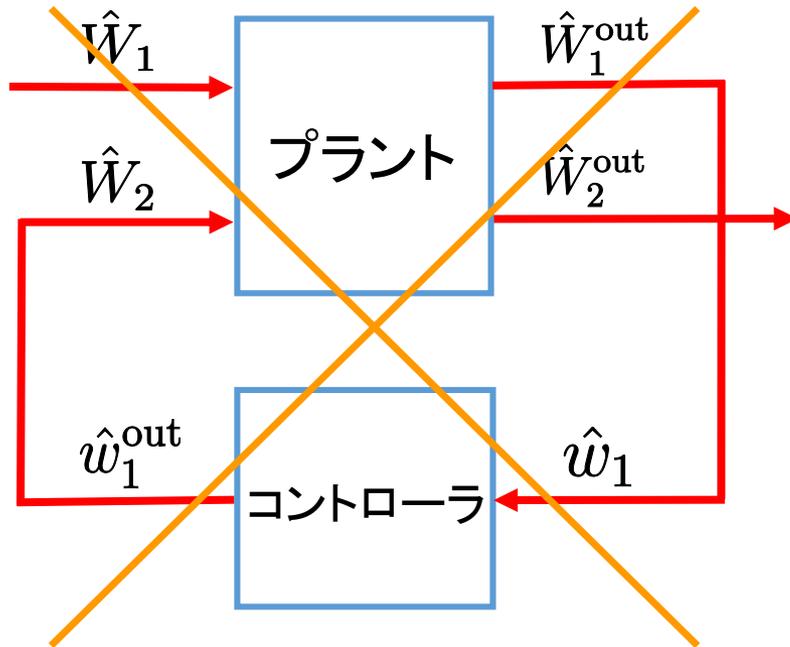
4. まとめ

BAE可能な量子系の一般構造

幾何学的制御を量子系のBAE問題に適用する

古典閉ループ系

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} d$$
$$z = \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$



古典の閉ループ系では、外乱や状態ベクトルの係数行列が

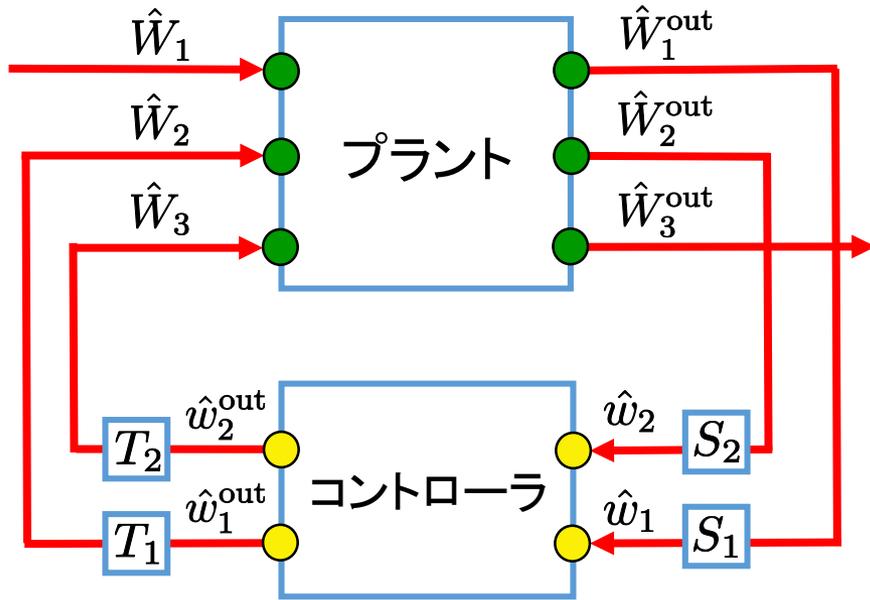
$$\begin{bmatrix} E & O \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} H & O \end{bmatrix}$$

のような特殊な構造を持っている。一般に、量子系ではこの構造は達成できない。



コントローラを**多入出力系**に拡張し、フィードバックループを複数形成。

BAE可能な量子系の一般構造



仮定

- 1) コントローラは2入力2出力系
→ プラントは3入力3出力系
- 2) 各外界との結合強度は等しい
- 3) コントローラの入出力前後にscattering processを設置

$$S_j = T_j = S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2)$$

→ $\pi/2$ - phase shifter

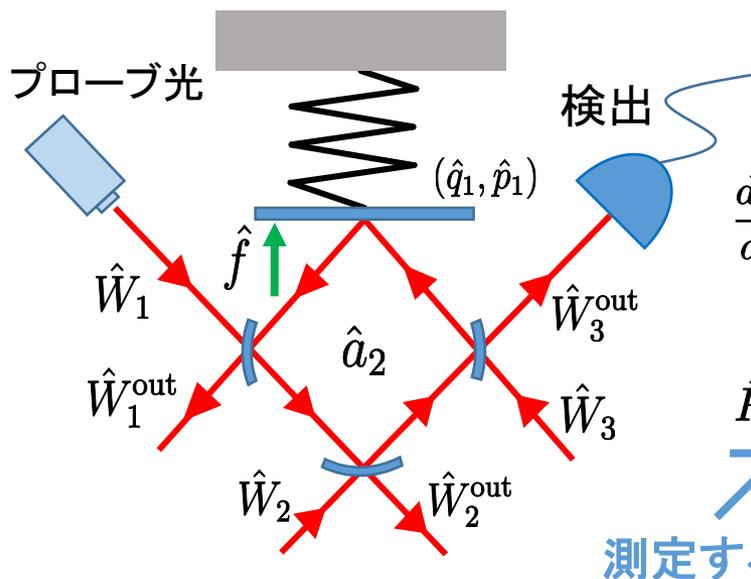
改良後の量子閉ループ系

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BC & BSC_K \\ B_K SC & A_K - B_K C_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} \hat{W}_1 + \begin{bmatrix} b \\ O \end{bmatrix} \hat{f}$$

$$\hat{W}_3^{\text{out}} = \begin{bmatrix} C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} + \hat{W}_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{D_K = -I_2}$$

オプトメカニクス系におけるBAEの実現

3入力3出力のオプトメカニクス系に幾何学的制御を適用する



BA noise \hat{Q}_1 と測定出力 \hat{P}_3^{out} にのみ注目

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_m & 0 & 0 \\ -\omega_m & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}\kappa & 0 \\ g & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\kappa \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\kappa} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{Q}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \hat{f}$$

$$\hat{P}_3^{\text{out}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\kappa} \end{bmatrix} \hat{x} + \hat{P}_1$$

BA noise

測定する位相成分

部分空間の情報

$$\text{Im } E = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

BA noise \hat{Q}_1 の侵入する空間

$$\text{Ker } H = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

出力 \hat{P}_3^{out} から見えない空間

コントローラ設計の手順

ステップ1 (可解条件のチェック)

$$\text{Im } E \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \text{Ker } H$$

$$\text{Im } E = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{Ker } H = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

- 後述のアルゴリズムを使って計算すると

$$\mathcal{V}_1 = \text{Im } E \quad \mathcal{V}_2 = \text{Ker } H$$

とわかる. よって, BAEを達成するコントローラが**存在する**. 定理 1

- コントローラの次元は

$$\dim \mathcal{X}_K = \dim \mathcal{V}_2 - \dim \mathcal{V}_1 = 2$$

と求まる. よって, 設計すべきコヒーレントフィードバックコントローラは**シングルモード**. 定理 2

コントローラ設計の手順

ステップ2 (コントローラのパラメトリゼーション)

定理2より

$$\begin{cases} \underline{A_K} = N\{A + 2(BF + GC + BC) + GF\}N^+ \\ \underline{B_K} = -N(G + B)S \\ \underline{C_K} = -S(F + C)N^+ \end{cases} \quad NN^+ = I$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -\sqrt{\kappa} & f_{14} \\ \frac{g}{\sqrt{\kappa}} & 0 & 0 & f_{24} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} \\ -\frac{g}{\sqrt{\kappa}} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ 0 & \sqrt{\kappa} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & 0 & n_{24} \end{bmatrix}$$

f_{ij}, g_{ij}, n_{ij} : フリーパラメータ

➡ BAEを達成するコントローラは行列 (F, G, N) で特徴付けられ、定理2より、**コントローラの集合**が得られた。

コントローラの具体的な構造を得るには、さらに**条件**を課す必要がある。

コントローラ設計の手順

ステップ3 (Physical realizability)

設計するコントローラが量子系である条件

$$A_K \Sigma + \Sigma A_K^\top + 2B_K \Sigma B_K^\top = O$$

$$B_K = \Sigma C_K^\top \Sigma$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



パラメータ間の拘束条件

$$(1) f_{12} = -g_{12} \quad (2) f_{11} = g_{22} \quad (3) n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} = -1$$

$$(4) f_{12}n_1 = f_{11}n_2 - f_{14} \quad (5) f_{24} + \sqrt{\kappa} = \frac{g}{\sqrt{\kappa}}n_2$$

$$(6) \left(\frac{3}{2}\kappa + \sqrt{\kappa}f_{24} \right) n_1 + \omega_m n_2 = -\sqrt{\kappa}f_{11}$$

$$(7) \omega_m n_1 - \left(\frac{3}{2}\kappa + \sqrt{\kappa}f_{24} \right) n_2 = \sqrt{\kappa}f_{12}$$

$$n_1 = n_{11}n_{24} - n_{14}n_{21}$$

$$n_2 = n_{12}n_{24} - n_{14}n_{22}$$

コントローラ設計の手順

ステップ4 (パッシブコントローラ)

設計するコントローラが能動デバイスを含まない条件

$$\Sigma A_K \Sigma = -A_K$$

$$\Sigma B_K \Sigma = -B_K$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



パラメータ間の拘束条件

$$8) f_{12} = \frac{g}{\sqrt{\kappa}}$$

$$9) f_{11} = 0$$

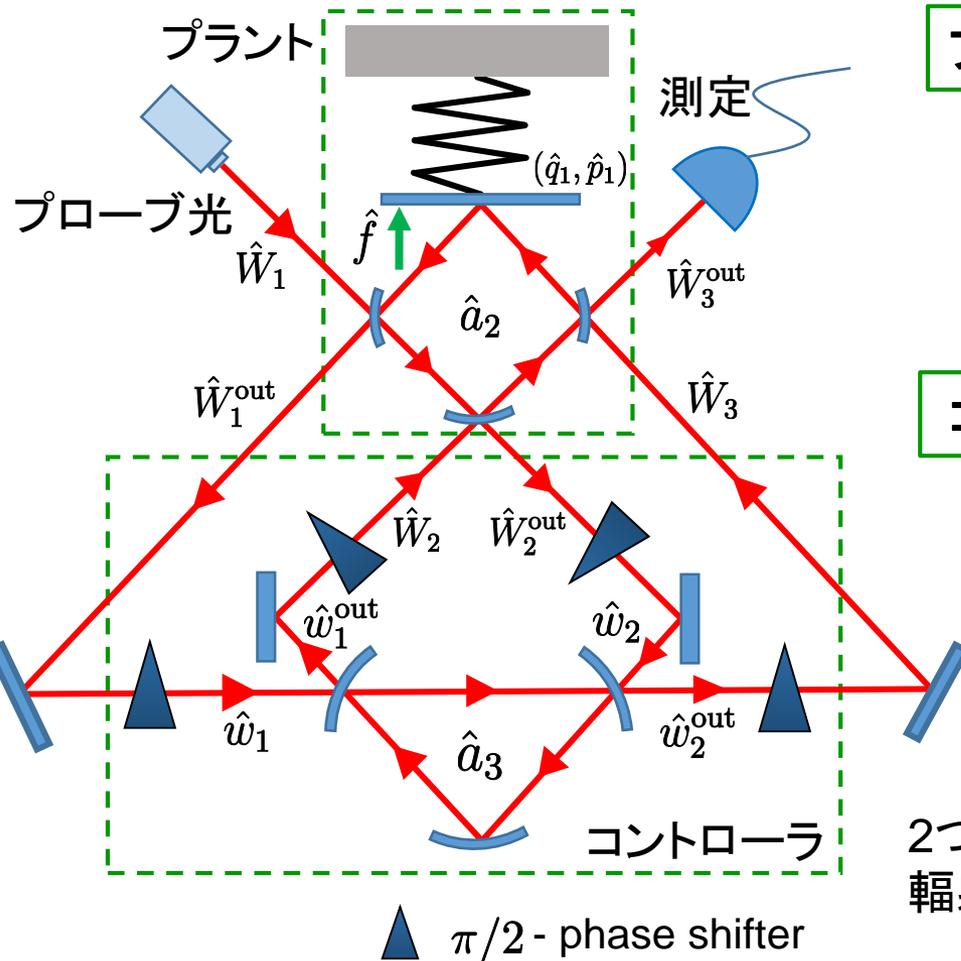
$$10) n_{11} = -n_{22}$$

$$11) n_{12} = n_{21}$$

BAEコントローラの実装例

コントローラの行列 (A_K, B_K, C_K) は以下のように定まる

$$A_K = \begin{bmatrix} -\frac{g^2}{\kappa} & -\omega_m \\ \omega_m & -\frac{g^2}{\kappa} \end{bmatrix} \quad C_K = -B_K^\top = \begin{bmatrix} \frac{g}{\sqrt{\kappa}} & 0 \\ 0 & \frac{g}{\sqrt{\kappa}} \end{bmatrix}$$



プラント

3入力3出力のオプトメカニクス系

κ : 光の減衰率

g : 光とミラーの結合強度

コントローラ

2入力2出力の共振器

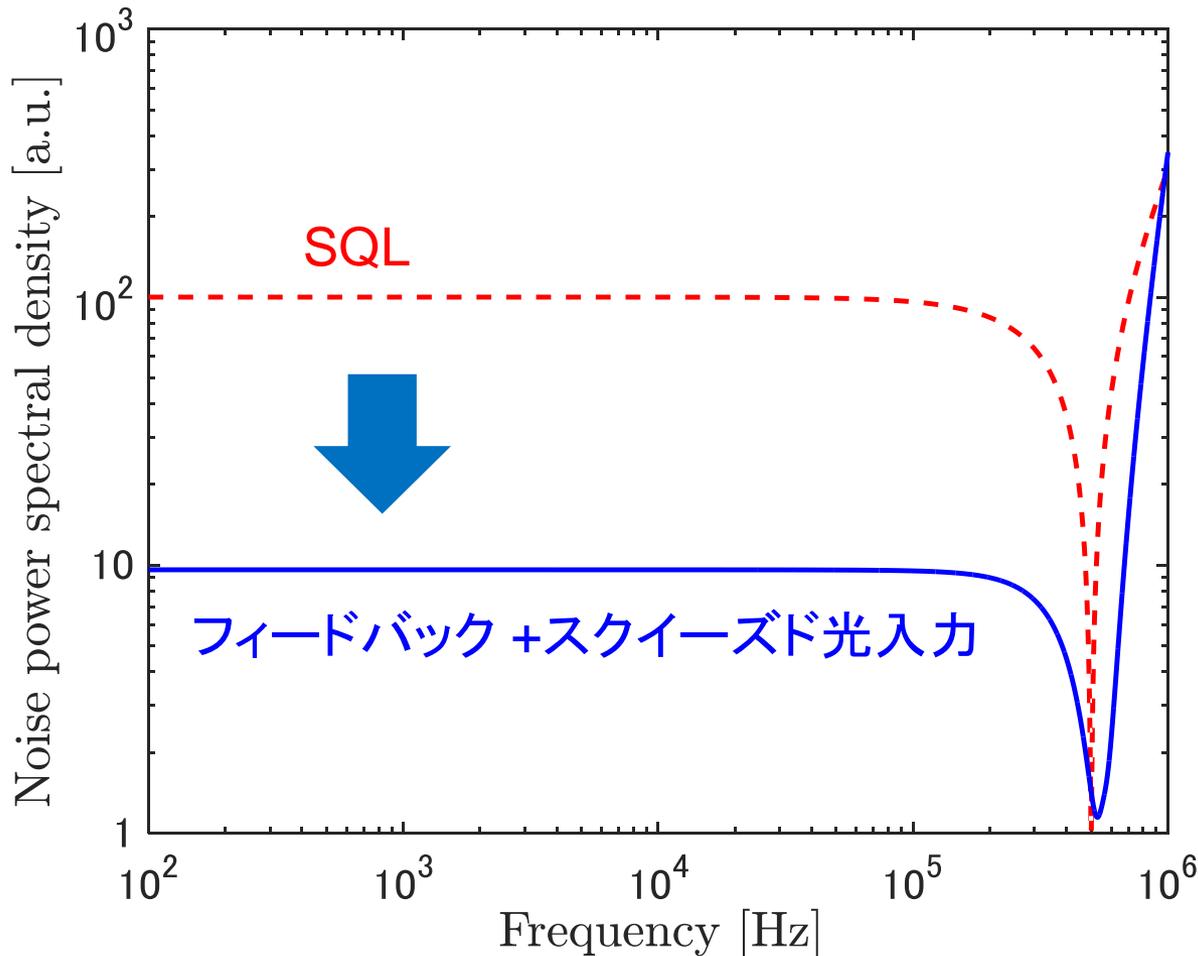
g^2/κ : 光の減衰率

$-\omega_m$: 共振器の変調周波数

2つの系をフィードバック接続することで
輻射圧雑音が相殺され、出力に現れなくなる。

シミュレーション結果

- ・ 熱雑音の効果を入れる
- ・ 幾何学的制御で得られたコントローラにおいてパラメータを調整
- ・ \hat{P}_1 方向のスクイズド光を入力する



ミラー共振周波数

$$\omega_m/2\pi = 0.5 \text{ MHz}$$

光の減衰率

$$\kappa/2\pi = 1 \text{ MHz}$$

ミラーと光の結合強度

$$g/2\pi = 300 \text{ kHz}$$

ミラーと \hat{f} の結合強度

$$\gamma/2\pi = 5 \text{ kHz}$$

スクイーミングパラメータ

$$r = 2 (\approx 9 \text{ dB})$$

概要

1. 研究背景・目的

- システム制御の考え方
- 信号検出問題

2. 幾何学的制御

3. 結果

- 量子外乱分離の一般構造
- オプトメカニクス系での設計例

4. まとめ

まとめ

信号検出におけるBAE問題は幾何学的制御の枠組みで捉えることができる

- 古典の幾何学的制御を適用可能な量子系の一般構造を示した.
- BAEを達成するフィードバックコントローラのパラメトリゼーションが得られた.
- BAEコントローラの実装例を示した.

詳細は

Y. Yokotera and N. Yamamoto, Geometric control theory for quantum back-action evasion, EPJ Quantum Technol. **3**, 15 (2016).

Appendix

不変部分空間に関する補題

補題1

\mathcal{V}_1 が (C, A) 不変部分空間であるとき, 以下の関係を満たす行列 G が存在する.

$$(A + GC)\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_1$$

補題2

\mathcal{V}_2 が (A, B) 不変部分空間であるとき, 以下の関係を満たす行列 F が存在する.

$$(A + BF)\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_2$$

可解条件の確認方法

定理1の可解条件をチェックする際は、以下の系1を使うと便利

$$\boxed{\text{定理1}} \quad \text{Im } E \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \text{Ker } H$$



系1

$$\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{V}^*$$

Im E を含む \mathcal{V}_1 のうち最小のもの

Ker H に含まれる \mathcal{V}_2 のうち最大のもの

\mathcal{S}^* - algorithm :

$$\text{(Step 1) } \mathcal{S}_0 := \text{Im } E$$

$$\text{(Step 2) } \mathcal{S}_i := \text{Im } E \oplus A(\mathcal{S}_{i-1} \cap \text{Ker } C) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\text{(Step 3) } \mathcal{S}^* = \mathcal{S}_i \quad (\text{if } \mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{i-1} \text{ in Step 2}).$$

\mathcal{V}^* - algorithm :

$$\text{(Step 1) } \mathcal{V}_0 := \text{Ker } H$$

$$\text{(Step 2) } \mathcal{V}_i := \text{Ker } H \cap A^{-1}(\mathcal{V}_{i-1} \oplus \text{Im } B) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\text{(Step 3) } \mathcal{V}^* = \mathcal{V}_i \quad (\text{if } \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i-1} \text{ in Step 2})$$